



WANG'S BLOG

王新龙老师博文摘选

Abstract

摘选了王新龙老师的网易 blog 中“教学”栏目下的所有博文

摘录时间 2014 年 10 月 15 日

摘选集仅用于学习与交流

Jiaxin Zhong

Jxzhong_nju@163.com

Contents

第零章 声学基础	5
求解若干声学问题的一个简单而实用的数学变换	5
A simple yet practical mathematical transform	5
聲學英文詞彙	8
第一章 质点振动学	13
弹簧质量对振动的影响	13
On the effect of mass of a spring on vibration	13
声学量的复数运算	17
Complex operations for acoustical quantities	17
振动控制原理	21
Principle of Vibration Control	21
质点受迫振动详解	26
Detailed solutions for forced vibration	26
第二章 弹性体振动学	38
一维振动系统的力阻抗	38
Mechanical impedance in one-dimensional systems of vibration	38
共振负载對棒纵振动的影響	42
On the effect of a resonant load on the longitudinal vibration of a rod	42
局域共振對弦波傳播的影響	48
Effect of local resonance on wave propagation on a string	48
第三章 电-力-声类比	55
导纳型力电类比	55
Mechano-electrical analogy of mobility type	55
有效質量與有效彈性，負質量與負彈性係數	61
On effective mass and stiffness	61
瑞利的电声类比：声流导率	70
Acoustic conductivity, an electro-acoustical analog of Rayleigh	70
第四章 声波的基本性质阿斯顿發送到	73
非均匀流体的声波方程	73
Equation of Sound Waves in ideal fluid with inhomogeneity	73

理想流体声波方程及其行波解	78
Equation of Sound Waves and Its Traveling Wave Solution in ideal Fluids	78
流体的弹性	86
Elasticity of Fluids.....	86
流体运动的拉格朗日描述	92
Lagrange Description of fluid motion	92
水波与声波之异同	98
Water waves and sound waves: similarities and differences.....	98
法向声阻抗率与界面反射	101
Normal Specific Acoustic impedance and Sound Reflection.....	101
全反射状态的声场与声能流	108
Sound Fields and Energy Flux under Total Reflection	108
声能与声强	116
Energy and Intensity of Sound Waves	116
声波的干涉	122
Interference of Acoustic Waves	122
流體力學引論	127
第五章 声波在管中的传播	147
管龠之聲	147
Sound generated by pipes.....	147
缓变截面管内的声传播	154
Sound propagation in ducts of slowly varying cross section.....	154
第六章 声波的辐射	162
点声源与格林函数	162
Point Sources of Sound and Green Functions	162
声场互易原理	174
Principle of Reciprocity of Sound Fields	174
声辐射压力	180
Sound Radiation Pressure.....	180
自由空間的點聲源	184
Point source of sound in free space	184
第七章 声波的接收与散射	189

汽泡共振原理	189
Principle of Bubble Resonance	189
散射声场的积分表示	193
Integral Representation for Scattered Sound Fields	193
一维声散射论	200
On one-dimensional acoustic scattering	200
第八章 室内声场	209
第九章 声波的吸收	210
流体的黏性与声吸收	210
Viscosity and sound absorption in fluids.....	210
第十章 非线性声学基础	221
参量共振原理	221
Principle of parametric resonance	221
非线性单摆	234
Nonlinear Pendulum.....	234
非线性受迫振动	240
Forced Nonlinear Vibration.....	240
非线性振动链与孤子	253
Solitons in a one-dimensional vibratory chain of particles coupled by nonlinear springs	253
非线性自由振动	262
Free nonlinear vibration	262
暂未分类的博文	270
声波方程的洛仑兹变换	270
Sound Wave Equation and Its Lorenz Transform	270
相速与群速	279
Phase Velocity and Group Velocity	279
运动点声源的辐射	285
Sound radiation from a moving point source	285
運動媒質的多普勒效應	292
Doppler Effect in Moving Media	292
再论声学量的时间均值	296

On temporal means of acoustic quantities 296

第零章 声学基础

引自: <http://xlwangnu.blog.163.com/blog/static/190719270201251412148829/>

求解若干声学问题的一个简单而实用的数学变换

A simple yet practical mathematical transform

南京大学声学研究所 王新龙

声学问题数学上多归结为二阶（常或偏）微分方程的求解。对于有些重要问题，如变截面声管（号筒）和非均匀媒质的声传播，所涉微分方程是变系数的，解析求解难度颇大。但若引入适当的数学变换，则变换后的微分方程数学结构更加简单而有助于获得解析解，或者物理意义愈为显著而适合于定性把握和分析。本文介绍声学诸多问题中不为人重视的一个简单而实用的变换，供学生学习《声学基础》参考。

单振子阻尼振动由如下二阶齐次常微分方程描述

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\alpha(t) \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = 0 \quad (0-1-1)$$

其中， y 表示振子位移， α 是因摩擦而引起的无量纲衰减系数， ω_0 是自由振动频率。若 α 和 ω_0 恒常，此方程属常系数常微分方程，其解众所周知【1】：

$$y(t) = \operatorname{Re} \left[A_0 e^{-\alpha t + j\omega_\alpha t} \right] = \operatorname{Re} \left[A(t) e^{j\omega_\alpha t} \right] \quad (0-1-2)$$

$$\left(A = A_0 e^{-\alpha t}, \omega_\alpha = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \right)$$

式中 $A=A(t)$ 是 t 时刻的复振幅， A_0 是 $t=0$ 时的复振幅， ω_α 是阻尼振子频率（ $<\omega_0$ ）， $\operatorname{Re}(\cdot)$ 表示取实部。可见，在阻尼的影响下，振幅 A 随时间指数衰减。然而，假如衰减系数 α 是时变的： $\alpha = \alpha(t)$ ，则求解方程（1）殊非易事。如果 ω_0 也是时间函数： $\omega_0 = \omega_0(t)$ ，则难度更大。

数学上，变阻尼和变频率的单振子方程（1）是如下（实）变系数二阶常微分方程之特例：

$$\frac{d^2}{dx^2} y(x) + 2\alpha(x) \frac{d}{dx} y(x) + [k_0^2 - k_1^2(x)] y(x) = 0 \quad (0-1-3)$$

此处，我们宁采用 x 为自变量，既可以表示空间，也可以表示时间。方程中的 α 和 k_1 皆可能是 x 的函数，但此处我们认为 k_0 是常数，具波数之意。值得指出，系数 α 取值可正可负，正意味着能量消耗（衰减）效应，负意指能量馈入（放大）效应。除描述阻尼振子的方程（1）之外，以方程（3）为原型者多矣，譬如，

一、号筒中的声传播问题【1，2】：

$$\frac{d^2 p}{dx^2} + 2\alpha \frac{dp}{dx} + k_0^2 p = 0, \left(\alpha(x) = \frac{1}{2} \frac{d \ln S(x)}{dx}, k_1 = 0 \right) \quad (0-1-4)$$

式中, p 为声压, $S=S(x)$ 为管横截面积。

二、非均匀媒质中的声波传播问题【2】:

$$\frac{d^2 p}{dx^2} + 2\alpha \frac{dp}{dx} + k_0^2 p = 0, \left(\alpha = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \ln \frac{1}{\sqrt{\rho_0(x)}}, k_1 = 0 \right) \quad (0-1-5)$$

其中 ρ_0 是媒质密度, 是 x 的函数 (非均匀): $\rho_0 = \rho_0(x)$ 。

三、球对称辐射声场【1, 2】:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial p}{\partial r} \right) + k_0^2 p = 0, \left(\alpha = \frac{2}{r}, k_1 = 0 \right) \quad (0-1-6)$$

其中, 自变量 r 为径向坐标。

欲求解诸如此类问题, 当然有专门途径可循, 但也存在某些通用的捷径或技巧, 使求解更简便。例如, 对方程(0-1-6)作简单的变换: $p(r) \rightarrow q(r)/r$, 把声压 p 变换为 q , 则球面波方程化为一维平面波问题【2】

$$\frac{d^2 q}{dr^2} + k_0^2 q = 0$$

其解众所周知。但是, 对于一般的变系数方程(0-1-3), 是否存在通行的变换方法?

答案是肯定的。重新考察阻尼振子方程 (1) 及其解 (2)。我们也可把解 (2) 写成如下形式,

$$\xi(t) = e^{-\alpha t} \eta(t) \quad (0-1-7)$$

上式相当于简单的数学变换: $\xi(t) \rightarrow \eta(t)$ 。将其代入常微分方程 (1), 得到新变量 $\eta(t)$ 的常微分方程,

$$\frac{d^2 \eta}{dt^2} + \omega_\alpha^2 \eta = 0$$

无阻尼自由振子方程。所以, 从物理角度而言, 变换 (7) 把阻尼振子变换为无阻尼振子! 推而广之, 如果 α 非常数, 可对 (3) 作变换:

$$y(z) = e^{-\int \alpha(x) dx} z(x) \quad (0-1-8)$$

则其被变换为:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + (k_0^2 - \mu^2(x)) z = 0 \quad (0-1-9)$$

其中，新的变系数 μ 为

$$\mu^2(x) = k_1^2(x) + \alpha^2(x) + \frac{d}{dx}\alpha(x) \quad (0-1-10)$$

虽然方程 (9) 仍是变系数的，但消除了一阶导数（衰减或放大）项，在很多情形下或许更易求解。可见，**数学变换 (8) 的物理意义是人为地排除了动力学系统中的衰减或放大效应**。方程 (9) 乃经典的一维势垒散射问题，可借助业已成熟的散射理论获得其解的性质。

诚然，所述变换是可逆的。我们也可以通过 (10) 把形式为 (9) 的方程变换成 (3) 的形式。究竟采用方程 (3) 还是方程 (9)，当视实际而定。例如，对于指数型号筒： $S = S_0 \exp(2\kappa x)$ ，我们也可取方程 (3) 的形式，因为此种特殊情形下， α 和 κ 是常数，方程 (3) 也十分容易求解。在某些情形下，也许采用常微分方程 (3) 的形式更为可取，因为一阶导数项（暂把 x 改回时间 t ）

$$2\alpha(t) \frac{dy}{dt}$$

不但可以描述系统的耗损衰减效应 ($\alpha > 0$)，也可以描述系统的参量放大效应 ($\alpha < 0$)，物理意义更显白。甚至，我们可以把方程 (3) 中的 k_1 变系数项消去，而把其效果一并于系数 α 中来分析耗散或放大效应。

值得特别指出的是，假如常微分方程 (3) 中的系数 α 和 k_1 均为自变量 x 的周期函数，周期 T ，则变换后的方程 (9) 中的系数 μ^2 亦周期变系数，即所谓的 Hill 方程。根据 **Floquet 定理**，Hill 方程 (9) 的解具有如下形式，

$$z(x) = \exp(\lambda x) Q(x) Q(t+T) = Q(t) \quad (11)$$

式中， λ 是 Floquet 特征指数， Q 是周期同为 T 的周期函数。如果方程 (9) 括号内的变系数 μ^2 是 x 的简谐函数，则此方程为著名的 **Mathieu 方程**，其解为 Mathieu 函数【3】——一种特殊函数。对于时间问题 (x 是时间)，如果 (11) 中的特征指数 λ 是虚数，则解随时间指数放大。此正所谓的**参量放大效应**——参量共振。参量共振也是一类极其重要的共振现象，存在于声光电诸物理学领域，不胜枚举，如日常所见如孩童荡秋千，力学中支点垂直振动激励下的单摆共振，流体力学中垂直振动激励下的水波 Farady 共振，等等。对于空间周期问题 (x 是空间变量)，公式 (11) 所描述的是固体晶格点阵中电子波的布洛赫波函数；如果特征指数 λ 是实数，则出现电子禁带，电子波无法正常传播。近年来，空间周期问题成为声学、电磁学和光学领域的研究焦点，有关禁带理论成为新一代声光电人工材料的关键。

【1】杜功焕等《声学基础》第二版。

【2】王新龙《声学基础》课件，□□□□版。

【3】王竹溪：《特殊函数概论》第十二章

引自: <http://xlwangnu.blog.163.com/blog/static/1907192702011929112756912/>

聲學英文詞彙

聲音, 聲學及其分支

聲音: sound

可聽聲: audible sound

超聲: ultrasound

次聲: infrasound

水聲: underwater sound

地聲: underground sound

噪聲: noise

聲學: Acoustics

物理聲學: Physical Acoustics; 非線性聲學: Nonlinear Acoustics

超聲學: Ultrasonics; 次聲學: Infrasonics; 水聲學: Underwater Acoustics

氣動聲學: Aeroacoustics

建築聲學: Architectural Acoustics; 室內聲學: Room Acoustics

音樂聲學: Musical Acoustics

環境聲學: Environmental Acoustics

海洋聲學: Oceanic Acoustics

電聲學: Electroacoustics

語言聲學: Speech Acoustics; 語音信號處理: Speech Processing

聲信號處理: Acoustical Signal Processing

光聲學: Optoacoustics

醫學超聲學: Medical Ultrasonics

生物聲學: Bioacoustics

聲化學: Sonochemistry

生理聲學: Physiological Acoustics; 心理聲學: Psychoacoustics

振動

振動: vibration

受迫振動: forced vibration

彈性: elasticity

勁度: stiffness; 彈性常數: stiffness constant

恢復力: restoration; 張力: tension

慣性, 聲質量: inertance

力(機械)阻抗(阻, 順, 抗): mechanical impedance (resistance, compliance, reactance)

力導納(導, 納): mechanical admittance, mobility (responsiveness, excitability)

集總線路元件: lumped circuit elements

共振: resonance; 反共振: antiresonance

參量共振: parametric resonance

共鳴器, 共振器: resonator

亥姆霍茲共鳴器：Helmholtz resonator

振子：oscillator

激振器：vibrator

隔振：isolation

（阻抗型，導納型）類比：(impedance-type, mobility-type) analogy

摩擦（力）：friction (force)

阻尼（係數）：damping (coefficient)

衰變：decay

諧波：harmonics, 諧和：harmony

基頻：fundamental frequency

固有（特徵，本徵）頻率：natural (characteristic, eigen-) frequency

簡正頻率（方式、模式）：normal frequency (mode)

波節：node; 波腹：antinode, loop

音：tone; 泛音：overtone; 音調：pitch; 音色：timbre

聲媒質及其性質

媒質、介質：medium

可壓縮的：compressible; 不可壓縮的：incompressible

壓縮率，壓縮係數：compressibility

可相融的，不相融的：miscible, immiscible

絕熱的：adiabatic; 等溫的：isothermal

體（剪切）彈性係數，體（切）彈性模量：bulk (shear) modulus

熱傳導（率）：thermal conduction (conductivity)

（容變）粘性：(bulk) viscosity

（切變、容變）粘滯係數：viscous coefficient, coefficient of (shear, bulk) viscosity

無黏（流體）：inviscid (fluid)

聲速：sound speed

頻散：dispersion

吸收（損失）：absorption (loss); 吸收係數：absorptivity, absorption coefficient

耗散（損失）：dissipation (loss)

非均勻性：inhomogeneity

多孔介質：porous media

穿孔：perforation

穿孔板：perforated plate

穿孔比：ratio of perforation

孔隙率：porosity

聲邊界層（厚度）、趨膚深度：acoustic boundary layer (thickness), skin depth

聲波及傳播

聲波：sound waves, acoustic waves

機械（水，重力，聲重力）波：mechanical (water, gravity, acoustic-gravity)

waves

傳播：propagation;

縱（橫）波：longitudinal (transverse) waves
行（駐）波：traveling (standing) waves
平面（柱面，球面）波：plane (spherical, cylindrical) waves
表面（瑞利，漸失）波：surface (Rayleigh, evanescent) waves
壓縮（體）波：compressional (bulk) waves
切變（彎曲）波：shear (flexural, bending) waves
（切）應變：(shear) strain
（切）應力：(shear) stress
波導：duct, waveguide; 聲管：pipe, tube
導波：guided waves
相（群）速度：phase (group) velocity
質點（體積）速度：particle (volume) velocity
聲壓（級）：sound pressure (level)
聲強（級）：sound intensity (level)
聲功率（級）：sound power (level)
響度（級）：loudness (level)
響亮（度）：sonority
分貝：decibel (dB)
倍頻程：octave
聲阻抗（阻，順，容，抗）：acoustic impedance
(resistance, compliance, capacitance, reactance);
聲質量：acoustic mass, acoustic inertance;
聲導納（導，納）：acoustic admittance, mobility (conductance, susceptance)
聲阻（抗，阻抗）率：specific acoustic resistance (reactance, impedance)
聲特性阻抗：acoustic characteristic impedance;
法向聲阻抗率：specific normal acoustic impedance
聲導率：acoustical conductivity
轉移阻抗：transfer impedance
阻抗匹配：impedance matching
聲傳輸線：acoustic transmission line
波前，波陣面：wavefront
正（斜，掠）入射：normal (oblique, grazing) incidence
反射（係數）：reflection (coefficient)
透射（係數）：transmission (coefficient)
傳輸損失，隔聲量：transmission loss
質量作用定律：mass law
折射：refraction; 衍射：diffraction; 干涉：interference
迴響、迴聲：echo
衰減（係數）：attenuation (coefficient)
渦旋：vortex, 渦度：vorticity
湍流：turbulence, 層流：laminar flow

輻射，散射

聲源: sound source; 源強: source strength
點源: point source
單極子: monopole;
偶極子: dipole
四極子: quadrupole
活塞: piston
像源: image source
聲場: sound field, acoustic field
近(遠)場: near (far) field
聲輻射(阻抗): acoustic radiation (impedance)
聲發射: acoustic emission
散射(截面, 損失): scattering (cross-section, loss)
背向散射: backscattering
互易性: reciprocity
指向性: directivity
直達聲: direct sound
迴聲: echo
混響: reverberate (動詞), reverberation (名詞)

非線性振動與聲

衝擊波: shock waves
聲孤立波: acoustic solitary waves; 聲孤子: acoustic solitons
聲馬赫數: acoustic Mach number
分岔: bifurcation; 混沌: chaos
次諧波(共振): subharmonics (resonance)
聲輻射壓(力): acoustic radiation pressure (force)

聲效應

空化: cavitation
聲致發光: sonoluminescence
聲化學: sonochemistry
聲懸浮: acoustic levitation
氣泡共振: bubble resonance

聲材料與控制

吸聲材料(器): sound absorbent (absorber)
消聲器: sound damper
聲障: sound baffle, sound barrier
隔聲: sound insulation, soundproof
隔聲罩: acoustical enclosure
聲屏蔽: acoustic shielding

隔聲板: acoustic septum
消聲室: anechoic chamber
消聲器: muffler, silencer
聲擴散體: sound diffuser
穿孔: perforation; 穿孔板: perforated panel

換能, 儀器設備, 測量

壓電效應: piezoelectricity
揚聲器: loudspeaker; 喇叭: horn
話筒, 擴音器, 麥克風: microphone
話筒, 擴音器: megaphone
聽力計: sonometer
換能器: transducer
水聽器: hydrophone
聲納: sonar
插入損失: insertion loss
靈敏度: sensitivity
聲全息: acoustical holography
聲探測: sounding
聲定位: sound localization
語圖、聲譜儀: sonogram, sonograph, echogram
超聲掃描術: sonography
聲測井: sonolog

第一章 质点振动学

引自: <http://xlwangnu.blog.163.com/blog/static/1907192702011918016340/>

弹簧质量对振动的影响

On the effect of mass of a spring on vibration

南京大學聲學研究所 王新龍

有质量均匀分布的弹簧，属非理想弹簧，须考虑弹簧的惯性。《声学基础》一书采用能量方法求解问题，也是瑞利采用的方法，极为简洁有效。其可行之理由概括有三。其一，虽然弹簧非理想，但系统仍保守，能量守恒。其二，弹簧之弹性势能只与弹簧的形变（拉伸与压缩）有关，而与有无质量分布无关，故仍可采用理想弹簧之公式。最后，弹簧存在质量分布，就存在动能分布，在计算系统总动能时须计及。本文视弹簧为分布式弹性体，分析其内部的应变与应力分布，弹簧位移的分布及运动规律。

设弹簧自然长度为 l ，单位长度质量为 ρ （线密度），总质量为 $M_s = \rho l$ 。如此有质量分布的弹簧，其内部运动类于棒的纵振动。在弹簧任意位置（设为 x ）处存在弹性应力。设弹簧的位移是 $\zeta = \zeta(x, t)$ ，应变为 $\partial\zeta / \partial x$ ，由此产生的应力为

$$F = -\kappa \frac{\partial\zeta}{\partial x} \quad (1-1-1)$$

式中， κ 是弹簧的弹性系数，正比于弹簧的杨氏模量。弹簧内部应变不同，应力也不等。惟弹簧均匀拉伸时，应变才简化为

$$\frac{\partial\zeta}{\partial x} = \frac{\xi}{l}$$

式中， ξ 是弹簧的总拉伸长度，即 $\xi = \zeta(l, t)$ 。代入（1）式，并根据虎克定律：

$F = -K_m \xi$ ，得到弹性系数的关系：

$$\kappa = K_m l \quad (1-1-2)$$

原位于 x 和 $x+dx$ 之间长度为 dx 的弹簧元段，受左右两边的应力作用，合力为：

$$F|_x - F|_{x+dx} = -\frac{\partial F}{\partial x} dx = \kappa \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} dx$$

对于无质量的弹簧，此合力当为零，应力在弹簧内部处处相等。但对于有质量的弹簧，此合力非零，而等于元段的质量 ρdx 乘以加速度。因此得到弹簧各点位移 ζ 遵循的振动方程：

$$\kappa \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}, \left(\rho = \frac{M_s}{l} \right) \quad (1-1-3)$$

可见，弹簧作为有质量的弹性体，其位移扰动 ζ 以波的形式传播，传播速度为

$$c_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{\rho}} = l \sqrt{\frac{K_m}{M_s}} \quad (1-1-4)$$

若弹簧自身的质量很小，传播速度就很大，弹簧整体对外部的响应几乎是瞬时的；反之不然：弹簧质量越大，传播速度越小。弹簧一端的扰动传递到另一端的响应时间为

$$\Delta t = \frac{l}{c_0} = \sqrt{\frac{M_s}{K_m}}$$

所以，响应时间正比于弹簧质量的平方根，反比于弹簧弹性常数的平方根。

现在假设弹簧的一端 ($x=0$) 固定，另一端 ($x=l$) 系一负载质量 M_m 。设质量的位移为 $\xi(t)$ ，它应等于弹簧 $x=l$ 端的位移： $\xi(t)=\zeta(l,t)$ (位移连续)。根据 (1-1-3) 得到满足边界条件的弹簧位移解，

$$\zeta(x,t) = \xi(t) \frac{\sin kx}{\sin kl}, \quad \left(k = \frac{\omega}{c_0} \right) \quad (1-1-5)$$

其中 ω 是系统振动频率， k 为弹簧的波数。代入 (1)，得到 $x=l$ 端的弹性应力

$$F|_{x=l} = -\frac{\kappa}{l} \xi(t) kl \cot kl = -(kl \cot kl) K_m \xi(t)$$

其中已经利用了关系 (2)。此即作用在质量 M_m 上的力。可见，质量 M_m 所受到的弹性力已不再是 $F = -K_m \xi$ ，还须乘以因子 $kl \cot kl$ 。根据牛顿定律，质量 M_m 的运动方程为：

$$M_m \frac{d^2}{dt^2} \xi(t) + (kl \cot kl) K_m \xi(t) = 0$$

其解是频率为 ω 的简谐运动，其中，

$$\omega^2 = kl \cot kl \frac{K_m}{M_m}$$

这是有质量弹簧与质点构成的单振子系统的固有频率，实际上是一个频率方

程。把 $k = \frac{\omega}{c_0}$ 代入，并经适当处理，频率方程可写成

$$kl \tan kl = \frac{M_s}{M_m} \quad (1-1-6)$$

此与一端系有负载质量 M_m 的棒纵振动频率非常完全相同。若弹簧的质量 M_s 远小于质量 M_m ，则上式中的 kl 也必定是小量，故方程左端可作 kl 的泰勒级数展开

$$\frac{M_s}{M_m} = (kl)^2 \left[1 + \frac{1}{3}(kl)^2 + \frac{2}{15}(kl)^4 + \dots \right]$$

其逆级数为

$$(kl)^2 = \frac{M_s}{M_m} \left[1 - \frac{1}{3} \frac{M_s}{M_m} + \frac{4}{15} \left(\frac{M_s}{M_m} \right)^2 + \dots \right]$$

代入 $k = \frac{\omega}{c_0}$ ，并利用速度公式(1-1-3)，得到质点自由振动频率 ω 的级数解：

$$\omega^2 = \frac{K_m}{M_m} \left[1 - \frac{1}{3} \frac{M_s}{M_m} + \frac{4}{15} \left(\frac{M_s}{M_m} \right)^2 + \dots \right] \quad (1-1-7)$$

可见，弹簧的质量 M_s 影响振子的振动频率。若仅计及一阶修正，则得到振动频率的近似修正公式：

$$\omega \approx \sqrt{\frac{K_m}{M_m} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{M_s}{M_m} \right)} \approx \sqrt{\frac{K_m}{M_m \left(1 + \frac{1}{3} \frac{M_s}{M_m} \right)}} = \sqrt{\frac{K_m}{M_m + \frac{1}{3} M_s}} \quad (1-1-8)$$

其中利用了近似公式 $1/(1+x) \approx 1-x$ 。此结果与教材【1】中根据能量关系所得结果一致。

不过，对于低频振动 ($kl \ll 1$)，无论质点的振速，还是弹簧的振速均较小。从精确解(1-1-5)可知，弹簧振速与传播速度之比

$$\frac{1}{c_0} \frac{\partial \zeta}{\partial t} = jkl \frac{\xi}{l} \frac{\sin kx}{\sin kl} = jkl \frac{\xi}{l}$$

即弹簧的振速要比其位移 ζ 小一个 kl 的量级。反过来，这表明弹簧的传播速度远比振速大，弹簧的运动可以迅速从一端传到另一端（即时性）。因此，有理由认为【1】弹簧内部的振速分布和加速度分布与质点 M_m 的速度 v 和加速度 dv/dt 呈近似线性关系：

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} \approx \frac{x}{l} v, \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \approx \frac{x}{l} \frac{dv}{dt} \quad (1-1-9)$$

即使位移 $\zeta = \zeta(x, t)$ 可能不再与 x 成正比。依此，则问题求解大为简化。把(1-1-9)的后一式代入公式(1-1-3)，方程右端的时间和空间因子分离，对 x 积分二次，得到弹簧位移表达式的通解，再根据边界条件（ $x=0$ 处固定， $x=l$ 处等于质点的位移 ξ ）求出待定系数。最后，得到弹簧位移和应力分布的表达式：

$$\zeta = \left[\xi + \frac{1}{6} \frac{M_s}{K_m} \left(\frac{x^2}{l^2} - 1 \right) \frac{dv}{dt} \right] \frac{x}{l} \xrightarrow{x=l} \xi \quad (1-1-10)$$

$$F = -K_m \left[\xi + \frac{1}{2} \frac{M_s}{K_m} \left(\frac{x^2}{l^2} - \frac{1}{3} \right) \frac{dv}{dt} \right] \xrightarrow{x=l} -K_m \xi - \frac{1}{3} M_s \frac{dv}{dt}$$

可见，当 M_m 存在加速度时，弹簧内部的应力是 x 的二次函数。在 $x=l$ 处的应力也不再是 $F=-K_m \xi$ ，而是增加了与弹簧质量成正比的惯性力。此力作用在质点 M_m 上，驱使质点运动。根据牛顿定律，得到质点的振动方程：

$$\left(M_m + \frac{1}{3} M_s \right) \frac{dv}{dt} + K_m \xi = 0 \quad (1-1-11)$$

其固有振动频率与公式(1-1-8)中给出的一致，即《声学基础》书中公式（1-2-26）。根据方程(1-1-11)，可在(1-1-10)式中消去 dv/dt ，得到弹簧位移和应力的显式表达式：

$$\zeta = \left[1 + \frac{1}{2} \frac{M_s}{3M_m + M_s} \left(1 - \frac{x^2}{l^2} \right) \right] \frac{x}{l} \xi \quad (1-1-12)$$

$$F = - \left[1 + \frac{1}{2} \frac{M_s}{3M_m + M_s} \left(1 - 3 \frac{x^2}{l^2} \right) \right] K_m \xi$$

其实，把公式(1-1-5)给出的位移表达式中的正弦函数作级数展开，保留 x 三次方，再经整理，所得近似解与(1-1-12)式完全一致。

【1】杜功焕等《声学基础》第 1.2.5 节，第 11-13 页。

引自: <http://xlwangnu.blog.163.com/blog/static/19071927020118612219845/>

声学量的复数运算

Complex operations for acoustical quantities

南京大學聲學研究所 王新龍

声学量是可观测的实数量，但也可用复数表示。采用复数表示不但可简化运算，还可凸显声学量的意义。例如，对于简谐运动，复振幅既含幅值又含相位信息，使用方便，意义明了。因此，无论在线性还是非线性声学理论中，均广泛采用复数表示声学量并作运算。不过，在运算过程中须注意运算规则，否则易于出错。本文简述声学量的复数表示及运算规则，并举例说明。

设小写的 x, y 和 z 均为实数量，而大写的 X, Y 和 Z 为对应的复数量，即 $x = \text{Re}(X)$, $y = \text{Re}(Y)$, 以及 $z = \text{Re}(Z)$, 其中 $\text{Re}(X)$ 表示取复数量 X 的实部；例如，

$$x = \text{Re}(X) = (1/2) (X + X^*)$$

其中右上标“*”表示复共轭操作，等等。

一、加法规则

假设 a 和 b 是任意实数，则有：

$$ax + by = \text{Re}(aX + bY)$$

对于导数和积分，存在关系

$$\frac{d}{dt} \text{Re}(X) = \text{Re}\left(\frac{dX}{dt}\right), \int \text{Re}(X) dt = \text{Re}\left(\int X dt\right)$$

二、乘法规则

设 z 是 x 和 y 之积， $z = xy$ ，对应的复量为 Z 。根据定义，

$$z = xy = \text{Re}(X) \text{Re}(Y) = \text{Re}(\text{Re}(X)Y) = \text{Re}(X \text{Re}(Y))$$

所以，

$$Z = \text{Re}(X)Y = \frac{1}{2}(XY + X^*Y) \quad (1)$$

或者，

$$Z = X \text{Re}(Y) = \frac{1}{2}(XY + XY^*)$$

严格而言，公式 (1) 中两个表式所给出的 Z 是不等的，只因 Z 的实部才有意义，故两种表示等价。

三、时间简谐量的周期平均值

复数表示对于简谐声学量的计算尤其有效。假设与时间 t 的依赖关系为 $\exp(j\omega t)$ ，其中 $\omega=2\pi/T$ 为频率， T 是振动周期， j 是虚数。例如， X 和 Y 是时间简谐的复量

$$X = X_a e^{j\omega t}, Y = Y_a e^{j\omega t}$$

X_a 和 Y_a 分别为 X 和 Y 的复振幅，与 t 无关。则有

$$\frac{dX}{dt} = j\omega X, \int X dt = \frac{X}{j\omega}$$

根据 (1)，此时乘积 $z=xy$ 的复数表达式为

$$Z = \frac{1}{2} X_a^* Y_a + \frac{1}{2} X_a Y_a e^{2j\omega t}$$

上式第二项有时间依赖关系 $\exp(2j\omega t)$ ，描述了乘积量 z 的瞬态运动，是二次谐波（频率 2ω ），其周期平均为零；第一项是与时间无关的“直流”项，等于复量 Z 的周期平均值：

$$\bar{Z} = \frac{1}{T} \int_0^T Z(t) dt = \frac{1}{2} X_a^* Y_a = \frac{1}{2} X^* Y$$

所对应的实量 $z=xy$ 的周期均值为

$$\bar{z} = \frac{1}{T} \int_0^T z dt = \overline{\text{Re}(Z)} = \text{Re}(\bar{Z}) = \frac{1}{2} \text{Re}(X^* Y)$$

所以，有如下重要的乘积平均法则

$$\overline{x(t)y(t)} = \frac{1}{2} \text{Re}(X^* Y) \quad (2)$$

简谐量本身的时间均值为零。但如乘积等非线性运算，多产生类似的“直流”项，因而平均值非零。“直流”和高次谐波的产生为典型的非线性效应。

以下以若干典型声学量为例，说明复数运算的应用。

单振子周期平均能量

质量为 M_m 、弹性系数为 K_m 的单振子，质点位移为 x ，速度 v ，对应的复位移和复速度分别为 X 和 V ，则单振子的势能和动能分别为

$$E_p = \frac{1}{2} K_m x^2 = \frac{1}{2} K_m [\text{Re}(X)]^2$$

$$E_k = \frac{1}{2} M_m v^2 = \frac{1}{2} M_m [\text{Re}(V)]^2$$

若单振子做简谐振动，则势能和动能的一个周期平均值分别为

$$\overline{E_p} = \frac{1}{2} K_m \overline{x^2} = \frac{1}{4} K_m |X|^2$$

$$\overline{E_k} = \frac{1}{2} M_m \overline{v^2} = \frac{1}{4} M_m |V|^2$$

对于自由振动，

$$V = j\omega X, \quad \omega_0^2 = \frac{K_m}{M_m}$$

代入前式，知平均势能等于平均动能：

$$\overline{E_p} = \overline{E_k}$$

声能通量密度和声强的运算

实声能通量密度 \mathbf{I} 为实声压 p 与实速度矢量 \mathbf{v} 的乘积： $\mathbf{I} = p \mathbf{v}$ 。声压、速度和声能通量密度等物理量本身是实量，但均可以用复数表示。下文我们放弃前面采用大写字母表示复量的做法，而是约定：**所有的变量符号均表示对应实量的复量**，如复声压、复速度和复能量通量密度仍用 p 、 \mathbf{v} 和 \mathbf{I} 表示。对这些量作取实部操作 Re ，即得到对应的实量。例如，根据公式（1），复声能通量密度的公式可写成

$$\mathbf{I} = \frac{1}{2} p \mathbf{v} + \frac{1}{2} p^* \mathbf{v} \quad (3)$$

取实部 $\text{Re}(\mathbf{I})$ 即为实声能通量密度。

对频率为 ω 的简谐声波，公式（3）中第一项描述声能通量密度之瞬变，而第二项是“直流”分量，为复声能通量密度之时间均值：

$$\overline{\mathbf{I}} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \mathbf{I} dt = \frac{1}{2} p^* \mathbf{v} \quad (4)$$

取其实部即得到**声强**：

$$\text{Re}(\overline{\mathbf{I}}) = \frac{1}{2} \text{Re}(p^* \mathbf{v})$$

可见，采用复运算，易分离场量（此处是声能通量密度）的时变和时不变成份。

平面行波情形

对于平面行波，传播方向为 \mathbf{n} （单位矢量），则 $\mathbf{v} = (p/z_0)\mathbf{n}$ ，代入公式（3）和（4）得到

$$\mathbf{I} = \frac{1}{2z_0} (p^2 + |p|^2) \mathbf{n}$$

$$\bar{\mathbf{I}} = \frac{1}{2z_0} \overline{(p^2 + |p|^2)} = \frac{|p|^2}{2\rho_0 c_0} \mathbf{n}$$

式中 $z_0 = \rho_0 c_0$ 是媒质声特性阻抗率。

声能密度的复数运算

用实声学量表示的流体声场的（瞬时）声能密度为

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \rho_0 \left[\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \left(\frac{p}{z_0} \right)^2 \right]$$

全改用复量表示，则上式应改为

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{4} \rho_0 \left[(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{v}) + \frac{1}{z_0^2} (p^2 + p^* p) \right] \\ &= \frac{1}{4} \rho_0 \left[\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \left(\frac{p}{z_0} \right)^2 \right] + \frac{1}{4} \rho_0 \left[\mathbf{v}^* \cdot \mathbf{v} + \left| \frac{p}{z_0} \right|^2 \right] \end{aligned} \quad (5)$$

对频率为 ω 的简谐声波，公式（5）后一等式中的第一项描述声能密度的瞬时变化，而第二项是“直流”分量，实为复声能密度之时间周期均值，取其实部即为平均声能密度，即

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{4} \rho_0 \left(|\mathbf{v}|^2 + \frac{|p|^2}{z_0^2} \right) \quad (6)$$

平面行波的情形

对于沿方向 \mathbf{n} 传播的平面行波，把 $\mathbf{v} = (p/z_0)\mathbf{n}$ 代入公式（5）和（6）得到

$$\varepsilon = \frac{1}{2\rho_0 c_0^2} (p^2 + |p|^2)$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2\rho_0 c_0^2} |p|^2$$

引自: <http://xlwangnu.blog.163.com/blog/static/190719270201187625542/>

振动控制原理

Principle of Vibration Control

南京大学声学研究所 王新龙

一个振动系统的运动，无非弹性、惯性和阻性三者合作使然。三者的影响可统一地由力（机械）阻抗 Z_m 描述。然而，三者的作用程度或各有轻重；有时弹性起主要作用，有时惯性起主要作用，而有时阻性起主要作用。究竟何者起支配作用，不仅取决于相关力学构件（质量，弹簧，力阻），还取决于系统工作的频率。在不同的应用场合，往往希望某种行为其支配作用，以期特定的系统响应。此涉及所谓的振动控制问题。本文阐述单振子稳态振动控制的原理。

利用力阻抗 Z_m ，单振子受迫振动的稳态解，包括位移 ξ 、速度 v 和加速度 dv/dt ，可分别表为

$$\xi = \frac{F}{j\omega Z_m}, \quad v = \frac{F}{Z_m}, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{j\omega F}{Z_m}, \quad (F = F_a e^{j\omega t}) \quad (1)$$

其中 F 是简谐驱动力， F_a 是其振幅， ω 是驱动频率。单振子的力阻抗可以写成如下形式：

$$Z_m = |Z_m| e^{j\theta} = R_m \left[1 + jQ_m \left(z - \frac{1}{z} \right) \right], \quad \left(\theta = \arg(Z_m), z = \frac{\omega}{\omega_0}, Q_m = \frac{\omega_0 M_m}{R_m} \right) \quad (2)$$

其中 R_m 和 M_m 分别为系统的力阻和质点的质量， Q_m 是系统的力学品质因子， z 是相对于固有频率 ω_0 的归一化驱动频率， θ 是阻抗 Z_m 的相角。代入（1）式，得到稳态解的新表示：

$$\xi = \alpha(z) \frac{F}{K_m}, \quad v = \beta(z) \frac{F}{\omega_0 M_m}, \quad \frac{dv}{dt} = \gamma(z) \frac{F}{M_m} \quad (3)$$

其中，

$$\alpha(z) = \frac{Q_m (jz)^{-1}}{1 + jQ_m (z - z^{-1})} = |\alpha| e^{-j\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}, \quad \left(|\alpha| = \frac{1}{\sqrt{(1 - z^2)^2 + z^2 Q_m^{-2}}} \right) \quad (4)$$

$$\beta(z) = \frac{Q_m}{1 + jQ_m(z - z^{-1})} = |\beta|e^{-j\theta}, \quad \left(|\beta| = \frac{Q_m}{\sqrt{1 + Q_m^2(z - z^{-1})^2}} \right) \quad (5)$$

$$\gamma(z) = \frac{jzQ_m}{1 + jQ_m(z - z^{-1})} = |\gamma|e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}, \quad \left(|\gamma| = \frac{zQ_m}{\sqrt{1 + Q_m^2(z - z^{-1})^2}} \right) \quad (6)$$

均为无量纲量。显然，根据驱动频率 z 取值的不同，解（3）展现不同的特性。

一、弹性控制区

从公式（3）可知，公式（4）定义的 α 可视为（无量纲化的）**有效力顺**：

$$\xi = (\alpha C_m) F$$

其倒数是（无量纲化的）有效弹性系数。在 $z > 0$ 的附近，此有效力顺 α 和有效弹性系数均为复数。在 $z=0$ 附近，做泰勒展开，

$$\alpha = 1 - \frac{jz}{Q_m} + \left(1 - \frac{1}{Q_m^2}\right) z^2 + \dots$$

$$\alpha^{-1} = 1 + \frac{jz}{Q_m} - z^2 + \dots$$

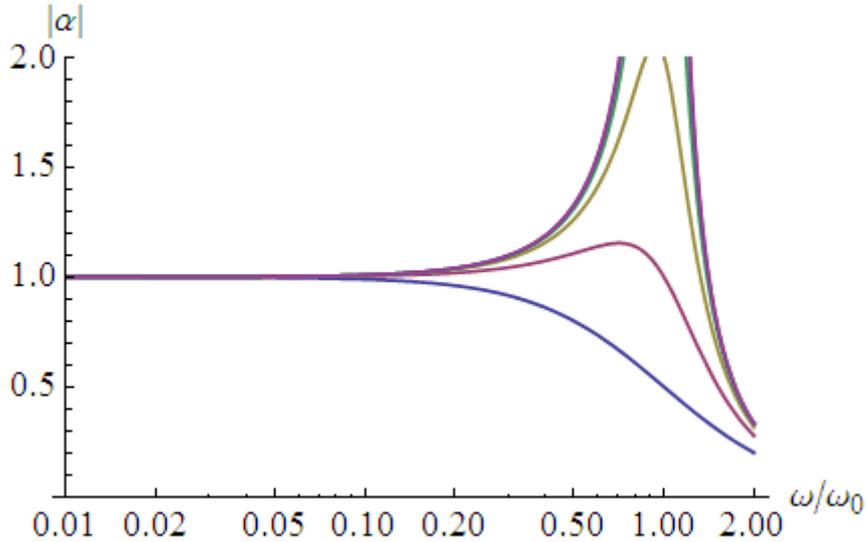
当驱动频率 ω 远小于振子的固有频率 ω_0 （即 $z \ll 1$ ）且 $z \ll Q_m$ 时，

$$|\alpha| = 1 + O(z^2) \approx 1, \quad \theta \approx -\frac{\pi}{2}$$

因此，由（3）得

$$\xi \approx \frac{F}{K_m} = C_m F, \quad \left(C_m = \frac{1}{K_m} \right)$$

此时，位移 ξ 的响应几乎取决于弹性，几乎与频率无关，如下图一所示。从图可见，在低频区域，频响曲线呈平坦。称此频率区域为**弹性控制区**。



图一、弹性控制区，图中曲线从下往上， Q_m 分别取值 0.5, 1, 2, 4, 8, 16

例如，压强式电容传声器的待测量是声压 p ，而声压正比于振动膜片的位移 ξ ，膜片位移 ξ 的变化引起电容的变化，从而可以通过测量电容构成的回路的电流、电压的变化而测出声压 p 。此测量系统的机械感应部分可简化为弹簧质点系统。为了避免测量系统本身的频响对测量结果的影响，要求系统位移响应是均匀的，几乎与频率无关。所以，这类器件或仪器必须设计成工作在弹性控制区。

二、惯性控制区

公式 (6) 定义的 γ 在 $z \rightarrow \infty$ 处有如下级数展开，

$$\gamma(z) = 1 + \frac{j}{Q_m} \frac{1}{z} + \left(1 - \frac{1}{Q_m^2}\right) \frac{1}{z^2} + O\left(\frac{1}{z^3}\right)$$

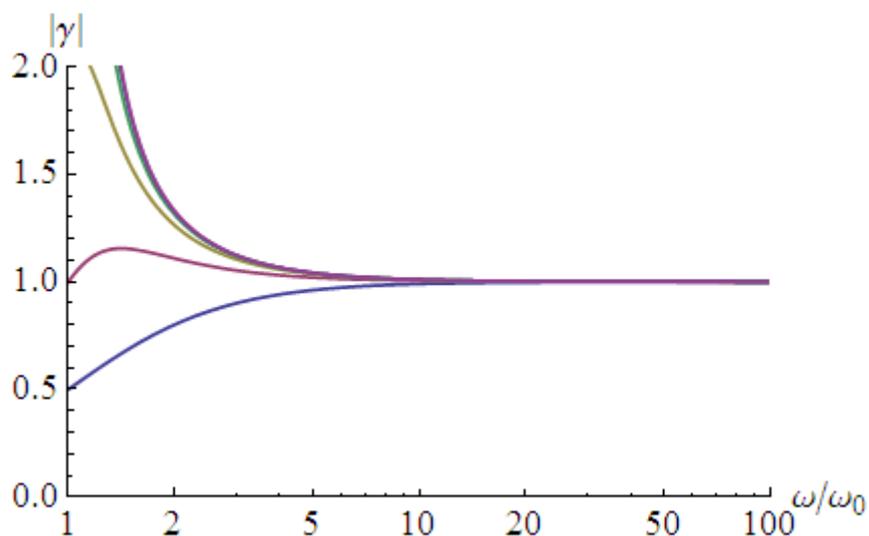
当驱动频率 ω 足够大，远大于固有频率 ω_0 ($z \gg 1$) 时，

$$|\gamma| = 1 + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

因此从 (3) 得到

$$\frac{dv}{dt} \approx \frac{F}{M_m}, \quad (\omega \gg \omega_0)$$

即，系统的加速度响应主要取决于惯性质量，与频率无关。称此区域为**惯性区**，或**质量控制区**。



图二、惯性控制区，图中曲线从下往上， Q_m 分别取值 0.5, 1, 2, 4, 8, 16

例如，动圈式扬声器的辐射功率与扬声器振动膜片的加速度成正比。欲使扬声器辐射频响均匀，要求振膜工作在惯性控制区。

三、力阻控制区

公式 (5) 定义的 β 在 $z=1$ 附近有如下级数展开，

$$\beta(z) = Q_m \left[1 - 2jQ_m(z-1) + O(z-1)^2 \right]$$

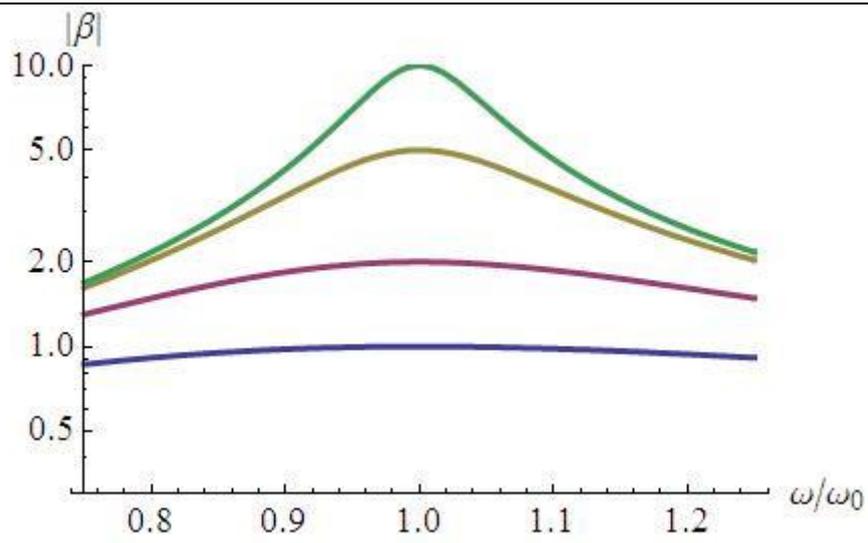
因此，当驱动频率 ω 接近于固有频率 ω_0 ，或者品质因子足够小 Q_m ，以致满足 $|z - z^{-1}| \ll Q_m^{-1}$ 时，

$$|\beta| = Q_m \left[1 + O(z-1)^2 \right] \approx Q_m$$

结果，质点振动的速度可近似为

$$v \approx \frac{F}{R_m}$$

此时，因弹性和惯性的作用几近抵消，仅阻尼对系统的速度响起决定性的作用。因此称此区域为力阻控制区，或阻性区域。



图三、阻性控制区，曲线从下到上 Q_m 取值分别为 1, 2, 5, 10.

引自: <http://xlwangnu.blog.163.com/blog/static/19071927020118324654998/>

质点受迫振动详解

Detailed solutions for forced vibration

南京大學聲學研究所 王新龍

振动产生声，声波本身又是由媒质质点的振动构成，故掌握质点振动的规律乃基础之基础。本文详述在给定初始条件下质点受迫振动的解。质点振动的通解由瞬态解和稳态解两部份构成，定解由初始条件确定。瞬态解因初始扰动之故而产生，但一般随时间指数衰减。稳态解则无关乎初始条件，它描述了外力驱动下质点的稳态响应，体现了系统与外激励源的同步效果。系统的力阻抗刻画了这种稳态的同步响应。本文首先给出了初位移和初速度为零的条件下质点振动的解析定解，并据此分析了瞬态振动的特性，读者可从中体味求解此类问题的一般方法。然后，详细讨论了振动的稳态响应与共振。最后，还介绍了振动的群延迟特性。

数学上，质点振动用常微分方程描述。最简单的是单振子的振动，服从如下的非齐次二阶常微分方程：

$$M_m \frac{d^2 \xi}{dt^2} + R_m \frac{d \xi}{dt} + K_m \xi = F_a e^{j\omega t} \quad (1)$$

其中， M_m 是单振子的质量， K_m 是弹簧的弹性常数， R_m 是质点运动的力阻， ξ 表示质点的复数位移， t 表示时间， ω 为驱动频率， F_a 为频率为驱动外力

$$F = F_a \exp(j\omega t)$$

的振幅。微分方程 (1) 是有阻尼的受迫振动方程。若无外力 ($F=0$)，则方程所描述的是质点的衰减振动。外力 F 补充系统能量的损耗，使得振动得以维系。

一、通解

方程 (1) 存在通解：

$$\xi = e^{-\delta t} (A e^{j\omega_0' t} + B e^{-j\omega_0' t}) + \frac{F_a}{j\omega Z_m} e^{j\omega t} \quad (2)$$

其中 A 和 B 是待定常数，由初始条件决定， δ 是阻尼系数： $\delta=R_m/(2M_m)$ ， ω_0' 是阻尼存在时的固有频率，它与自由振动频率 ω_0 的关系为：

$$\omega_0' = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q_m^2}}, \quad \left(\omega_0 = \sqrt{\frac{K_m}{M_m}} \right)$$

Q_m 是力学品质因子，而 Z_m 是系统的力阻抗：

$$Z_m = |Z_m| e^{j\alpha_0} = R_m + j\omega M_m + \frac{K_m}{j\omega} = R_m + j\omega_0 M_m \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$$

解(2)的第一项描述了质点的瞬态运动。瞬态运动一般由初始扰动(外力、初始位移和速度等)产生,并随时间而衰减,最后消失。第二项描述稳态运动,是瞬态消失后的质点在外力作用下的持续振动。

二、初始条件与定解

要得到质点振动的确解,必须给定初始位移和初始速度,从而求出待定系数 A 和 B。最简单的情形是初始位移 ξ 和初始速度 v 均为零:

$$\begin{cases} \xi|_{t=0} = A + B + \frac{F_a}{j\omega Z_m} = 0 \\ v|_{t=0} = \frac{d\xi}{dt}|_{t=0} = (-\delta + j\omega_0)A + (-\delta - j\omega_0)B + \frac{F_a}{Z_m} = 0 \end{cases}$$

由此求得待定常数 A 和 B:

$$A = -\frac{\omega + \omega_0 - j\delta}{2\omega_0} \frac{F_a}{j\omega Z_m}, \quad B = \frac{\omega - \omega_0 - j\delta}{2\omega_0} \frac{F_a}{j\omega Z_m}$$

代入通解表达式(2),得到初位移和初速度均为零的复位移定解

$$\begin{aligned} \xi &= e^{-\delta t} \left(-\frac{\omega + \omega_0 - j\delta}{2\omega_0} \frac{F_a}{j\omega Z_m} e^{j\omega_0 t} + \frac{\omega - \omega_0 - j\delta}{2\omega_0} \frac{F_a}{j\omega Z_m} e^{-j\omega_0 t} \right) + \frac{F_a}{j\omega Z_m} e^{j\omega t} \\ &= \frac{F_a}{j\omega Z_m} \left[e^{-\delta t} \left(-\frac{\omega + \omega_0 - j\delta}{2\omega_0} e^{j\omega_0 t} + \frac{\omega - \omega_0 - j\delta}{2\omega_0} e^{-j\omega_0 t} \right) + e^{j\omega t} \right] \end{aligned}$$

稍作整理,得到解的最简表达式

$$\xi = \frac{F_a}{j\omega Z_m} \left[-e^{-\delta t} \left(\cos \omega_0 t + \frac{\delta + j\omega}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right) + e^{j\omega t} \right] \quad (3)$$

其中,方括号内的第一项是瞬态振动,第二项是与外驱动同步的响应。同步表现为振动频率与驱动频率 ω 一致。

以下考虑两个特例。

1、无阻尼的理想振子:

此时, $R_m=0$, $\delta=0$, 且,

$$\omega_0' = \omega_0$$

代入定解表达式 (3)，得到

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{F_a}{-M_m(\omega^2 - \omega_0'^2)} \left(e^{j\omega t} - j \frac{\omega}{\omega_0'} \sin \omega_0' t - \cos \omega_0' t \right) \\ &= -\frac{F_a}{M_m} \frac{e^{j\omega t} - e^{j\omega_0' t} - j \frac{\omega - \omega_0'}{\omega_0'} \sin \omega_0' t}{\omega^2 - \omega_0'^2} \\ &\xrightarrow{\omega \rightarrow \omega_0'} \frac{F_a}{2j\omega_0' M_m} \left(e^{j\omega_0' t} - \frac{\sin \omega_0' t}{\omega_0' t} \right) t\end{aligned}$$

其实部为

$$\operatorname{Re}(\xi) = -\frac{F_a}{M_m} \frac{\cos \omega t - \cos \omega_0' t}{\omega^2 - \omega_0'^2} \xrightarrow{\omega \rightarrow \omega_0'} \frac{F_a}{M_m} \frac{t}{2\omega_0'} \sin \omega_0' t$$

其中求极限时应用了数学的罗必达法则。可见，当驱动频率 ω 趋近自由振动频率 ω_0 时，位移振幅与时间 t 成正比发散，于是单振子发生共振。

2、有阻尼振子

根据公式 (3)，当存在阻尼时，若驱动频率 ω 趋近于固有频率 ω_0 ， $Z_m \rightarrow R_m$ ，

$$\xi \xrightarrow{\omega \rightarrow \omega_0} \frac{F_a}{j\omega R_m} \left[e^{j\omega_0' t} - e^{-\delta t} \left(\cos \omega_0' t + \frac{\delta + j\omega_0'}{\omega_0'} \sin \omega_0' t \right) \right] \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{F_a}{j\omega R_m} e^{j\omega_0' t}$$

取其实部，得到实数位移解

$$\operatorname{Re}(\xi) \xrightarrow{\omega \rightarrow \omega_0} \frac{F_a}{R_m} \left(\frac{\sin \omega_0' t}{\omega_0'} - e^{-\delta t} \frac{\sin \omega_0' t}{\omega_0'} \right) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{F_a}{\omega_0' R_m} \sin \omega_0' t$$

可见，位移解并不发散，稳态幅值与力阻成反比。

物理量的无量纲化处理是良好的学术实践，不但可以简化数学处理，而且可以凸显物理量在其中所起作用的大小。定义无量纲驱动频率： $z = \omega / \omega_0$ 和时间 $\tau = \omega_0 t$ ，则得到归一化位移解 D，

$$D = \frac{\xi}{F_a / (R_m \omega_0)}$$

$$= \frac{e^{-jz\tau} - e^{-\frac{\tau}{2Q_m}} \left[\cos\left(\tau \sqrt{1 - \frac{1}{4Q_m^2}}\right) + \frac{1}{2Q_m} + jz \frac{\sin\left(\tau \sqrt{1 - \frac{1}{4Q_m^2}}\right)}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q_m^2}}}\right]}{Q_m(1 - z^2) + jz}$$

其实数解 $\text{Re}(D)$ 的图示如下图一所示。由图可见，当外驱频率等于自由振动频率 ($z=1$) 时，质点的响应强烈；而远离共振频率 ($|z-1| \gg 0$) 时，响应微弱。瞬态运动只出现在开始时间阶段，当经过约 $10 \times Q_m$ 的时间后基本消失无踪。

图一、单振子的位移响应。左圖： $Q_m=10, z=1$ ；右圖： $Q_m=10, z=1.5$

三、稳态解

稳态解与初始条件无关。根据 (2) 式，依次得到位移、速度和加速度的稳态解如下

$$\xi = \frac{v}{j\omega} = \frac{(jz)^{-1} Q_m}{1 + jQ_m(z - z^{-1})} \times \frac{F}{K_m}$$

$$v = \frac{F}{Z_m} = \frac{1}{1 + jQ_m(z - z^{-1})} \times \frac{F}{R_m}$$

$$\frac{dv}{dt} = j\omega v = \frac{jzQ_m}{1 + jQ_m(z - z^{-1})} \times \frac{F}{M_m}$$

分别 定义无量纲位移、速度和加速度如下：

$$\alpha(z) = \frac{(jz)^{-1} Q_m}{1 + jQ_m(z - z^{-1})}$$

$$\beta(z) = \frac{Q_m}{1 + jQ_m(z - z^{-1})}$$

$$\gamma(z) = \frac{jzQ_m}{1 + jQ_m(z - z^{-1})} \quad (4)$$

则有

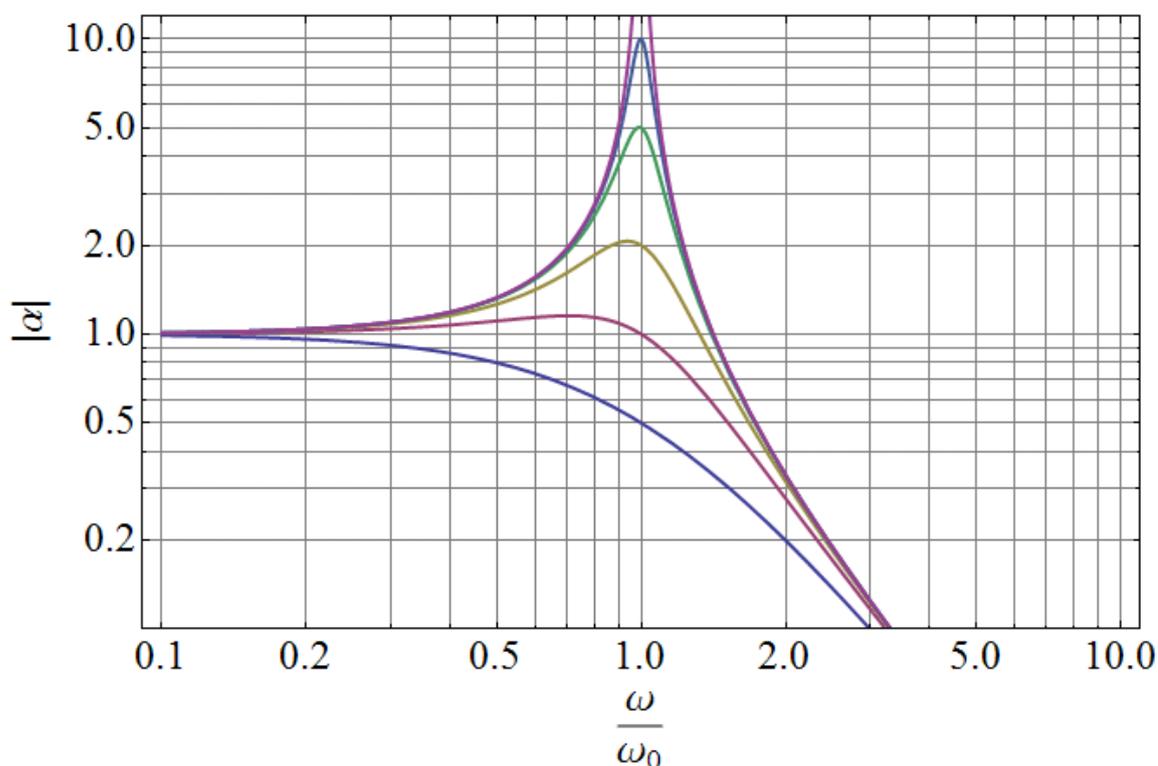
$$\xi = \alpha(z) \frac{F}{K_m}, v = \beta(z) \frac{F}{\omega_0 M_m}, \frac{dv}{dt} = \gamma(z) \frac{F}{M_m} \quad (5)$$

显然，归一化的位移、速度和加速度具有性质：

$$\lim_{z \rightarrow 0} \alpha(z) = 1, \lim_{z \rightarrow 1} \beta(z) = Q_m, \lim_{z \rightarrow \infty} \gamma(z) = 1$$

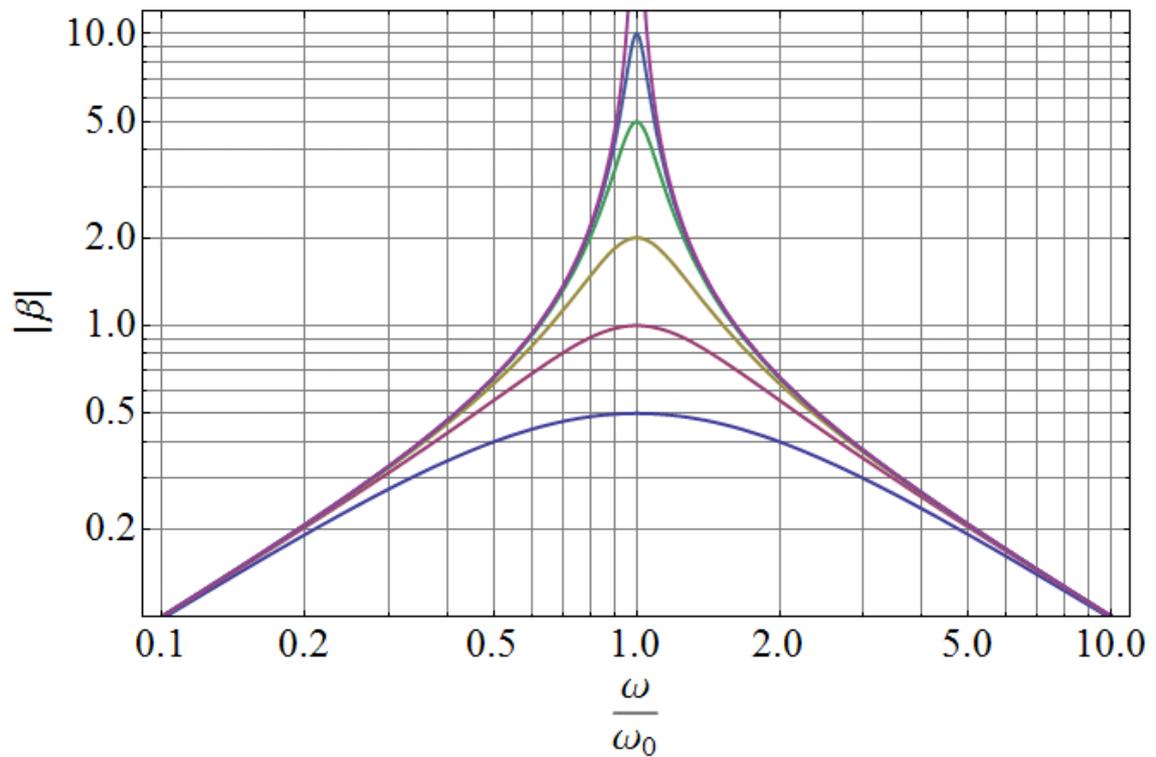
1、幅频响应

位移幅频响应如下图所示。注意，图中纵横坐标均采用对数坐标。从图可见，随着 Q_m 值的增大，共振峰越来越尖锐，乃至趋向无穷大。还可以看出，共振峰位置并非在 $z=1$ 处，而是稍稍偏左。随着 Q_m 值之增大，该位置趋近 $z=1$ 的位置。



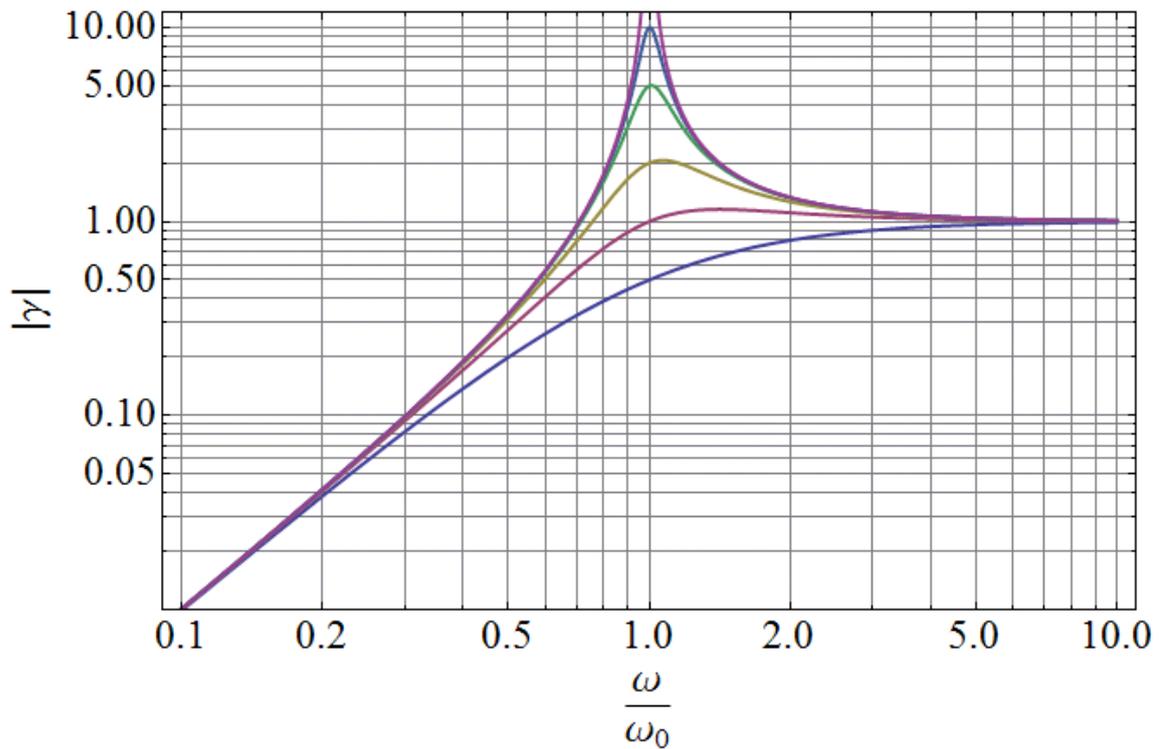
图三、位移幅频响应曲线。从下至上，曲线分别取 $Q_m=0.5, 1, 2, 5, 10, \dots$ 。

速度幅频响应如下图所示。与位移响应曲线不同，速度共振严格发生在 $z=1$ 处。



图三、速度幅频响应曲线。从下至上，曲线分别取 $Q_m=0.5, 1, 2, 5, 10, \dots$ 。

加速度幅频响应如下图所示。可见，加速度共振也不是严格发生在 $z=1$ ，而是偏右；随着 Q_m 值的增大，峰值位置趋近 $z=1$ 的位置。



图四、加速度幅频响应曲线。从下至上，曲线分别取 $Q_m=0.5, 1, 2, 5, 10, \dots$ 。

2、相位响应

人们在考察单振子的稳态响应时，多关心幅频响应，而常忽略相位响应。其实，相位响应反映了系统对外界反映的快慢，在涉及时间的问题（如延迟）中尤为重要，丝毫不亚于幅度响应。由公式（4）和（5）可知，速度与驱动之间存在相位差

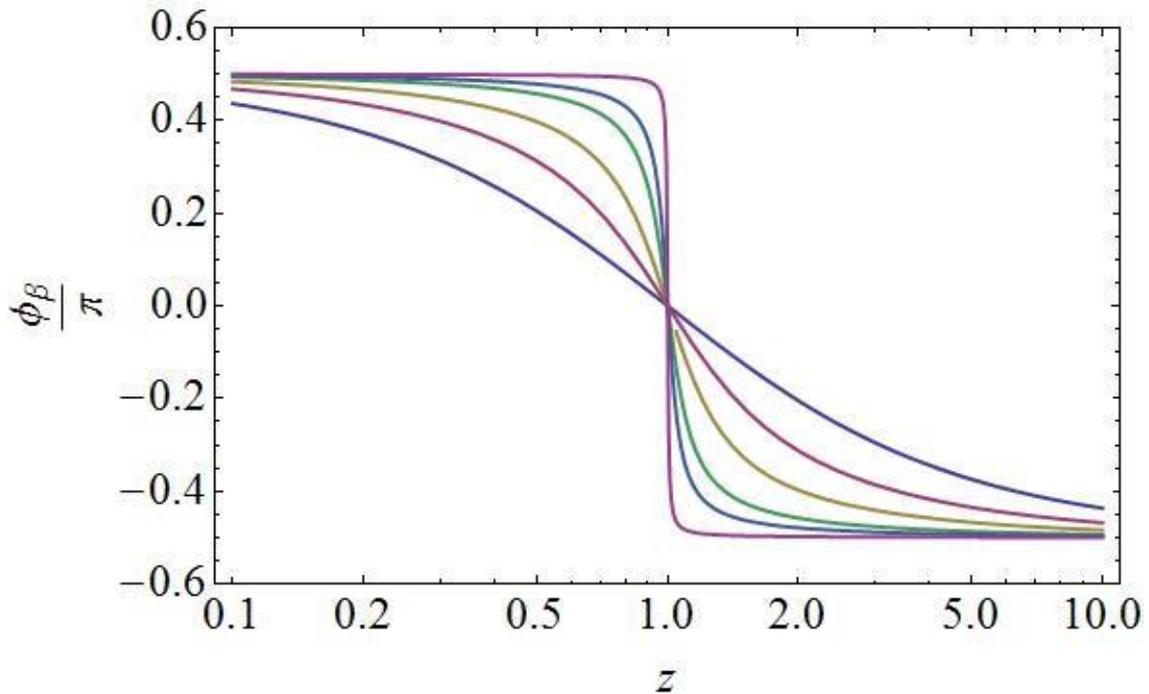
$$\phi_\beta = -\arctan\left[Q_m(z - z^{-1})\right]$$

而根据位移和加速度与速度的稳态关系， $\xi = v / j\omega$, $\dot{v} = j\omega v$ ，位移和加速度的相位分别为

$$\phi_\alpha = \phi_\beta - \frac{\pi}{2}, \quad \phi_\gamma = \phi_\beta + \frac{\pi}{2}$$

下图五绘出了不同力学品质因子 Q_m 情形下的速度相位响应谱。从图可见，无论 Q_m 取值如何，从低频 ($z \ll 1$) 到高频 ($z \gg 1$) 横跨共振频率，相位变化 180 度。就位移而言，低频时，响应与驱动同步（相位差为零），而高频时与驱动反相（相位差 180 度）。不同的 Q_m 值，其相位响应谱的平缓程度有所不同。对于高 Q_m 值，相位的变化集中在自由振动共振频率处，发生 180 度的负

跳变；即当驱动频率小于自由振动频率时，位移响应几乎与驱动同步，而一旦频率大于自由振动频率，位移几乎与驱动反相。



图五，速度相位响应谱，其中从最平缓变化到急剧变化的曲线分别对应 $Q_m=0.5, 1, 2, 5, 10, 100$ 。

四、单振子的群延迟

当信号通过器件时，会产生时间延迟。相位延迟（Phase Delay）衡量谐波成份的延迟时间，而群延迟（Group Delay）则衡量一个幅度波包（包络）的延迟时间。波包信号在频域上包含窄带的频率组分，而在时域上表现为某频率振荡信号的幅度调制。对于单振子受迫系统，当驱动振幅呈缓慢调制的包络形状时，振子的响应延迟可以用群延迟来描述。

设单振子的质量为 M_m 、自由振动频率为 ω_0 、力学品质因子 Q_m 。在简谐驱动力 $F=F_a \exp(j\omega t)$ 的驱动下，振子的稳态速度响应为

$$v = \frac{Q_m}{1 + jQ_m \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \frac{F_a e^{j\omega t}}{\omega_0 M_m} = \frac{F_a}{R_m} \frac{e^{j(\omega t - \phi)}}{\sqrt{1 + Q_m^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}$$

其中的相位差

$$\phi = \arctan \left[Q_m \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]$$

而根据位移和加速度与速度的稳态关系, $\xi = v / j\omega$, $\dot{v} = j\omega v$, 位移和加速度的相位分别为

$$\phi \mp \pi / 2$$

相位差反映了系统响应的延迟。群延迟时间实际上就是相位响应曲线的斜率, 即

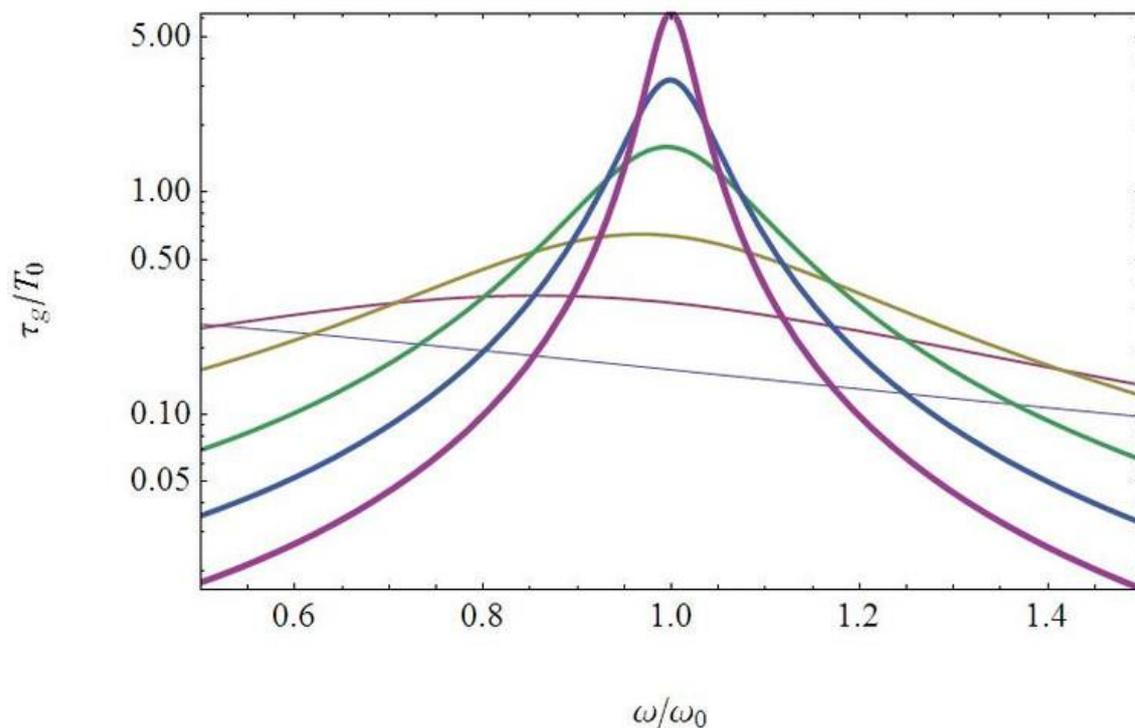
$$\tau_g = \frac{d\phi}{d\omega} = \frac{Q_m}{\omega_0} \frac{1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}{1 + Q_m^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2} \xrightarrow{\omega \rightarrow \omega_0} \frac{2Q_m}{\omega_0} = \frac{Q_m}{\pi} T_0$$

$$\left(T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \right)$$

或者,

$$\omega_0 \tau_g = Q_m \frac{1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}{1 + Q_m^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2} \xrightarrow{\omega \rightarrow \omega_0} 2Q_m$$

由于位移、加速度的相位与速度的相位只差一个常数, 故他们的群延迟与速度的相同。从上列公式可知, 当中心频率等于自由振动频率时, 群延迟最大, 直接正比于系统的品质因子 Q_m 和自由振动周期 T_0 之积; 例如, 如果 $Q_m=3.14$, 则群延迟时间是整整的一个周期。下图给出无量纲的群延迟时间与频率的关系。

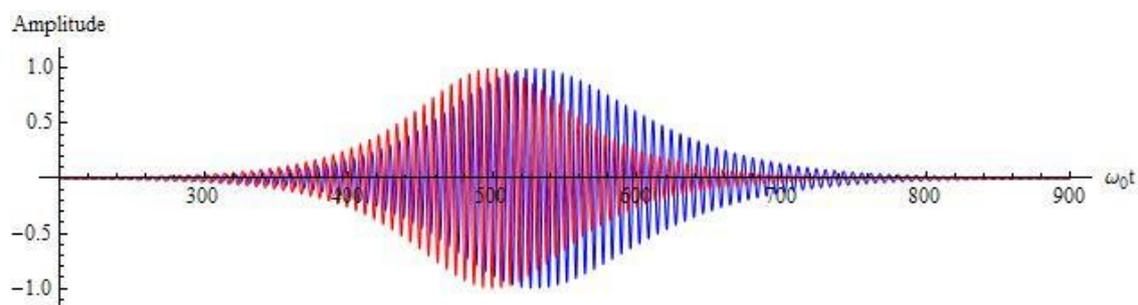


图一、群延迟曲线：从最细到粗的曲线， Q_m 依次取值 0.5, 1, 2, 5, 10, 20, 其中 T_0 是固有振动周期。

下图是驱动力取如下调制波包形式

$$F(t) = \text{sech}\left(\frac{\omega_0 t}{50} - 10\right) e^{j\omega_0 t}$$

所得到的位移时域响应，驱动频率等于系统自由振动频率， $Q_m=20$ 。红色曲线为驱动的时域波形，蓝色为位移波形。为了比较方便，图中驱动力的曲线作了振幅归一化处理。从图中可见，驱动包络曲线在 500 处极大，而位移包络的峰值明显延后 6 个左右振动周期 T_0 ，与理论预测一致。



图二、驱动力（红色）和位移响应（蓝色）的时域信号。位移响应信号通过数值求解单振子振动方程获得。

【附录】实数方法求解

微分方程 (1) 的解也可以用实数表示:

$$\xi = a e^{-\delta t} \cos(\omega_0 t - \varphi) + \frac{F_a}{\omega |Z_m|} \sin(\omega t - \theta) \quad (6)$$

式中, θ 是阻抗 Z_m 的相角: $\theta = \arg(Z_m)$, a 和 φ 是瞬态解的待定振幅和初相位, 由初始条件决定。根据初位移和初速度均为零的条件, 得到如下对方程:

$$\begin{cases} a \omega \cos \varphi = v_a \sin \theta \\ a (\delta \cos \varphi - \omega_0 \sin \varphi) = v_a \cos \theta \end{cases} \quad \left(v_a \equiv \frac{F_a}{|Z_m|} \right)$$

两式相除, 得到相位 φ 的解, 代入第一式, 最后得到瞬态解的幅度与相位:

$$\begin{cases} \tan \varphi = \frac{\delta - \omega \cot \theta}{\omega_0} \\ a = \frac{v_a \sin \theta}{\omega \cos \varphi} \end{cases} \quad (7)$$

代入 (6) 得到受迫振动的确解,

$$\xi = \frac{v_a \sin \theta}{\omega} \left[e^{-\delta t} \frac{\cos(\omega_0 t - \varphi)}{\cos \varphi} + \frac{\sin(\omega t - \theta)}{\sin \theta} \right] \quad (8)$$

若无阻尼, $R_m=0$, $\delta=0$,

$$Z_m = j\omega M_m \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right), \quad \begin{cases} |Z_m| = \omega M_m \left| 1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right| \\ \theta = \frac{\pi}{2} \times \begin{cases} -1, & (\omega < \omega_0) \\ 1, & (\omega > \omega_0) \end{cases} \end{cases}$$

则根据公式 (7), $\varphi=0$, 而

$$a = \frac{F_a}{\omega |Z_m|} \times \begin{cases} -1, & (\omega < \omega_0) \\ 1, & (\omega > \omega_0) \end{cases} = \frac{F_a}{M_m (\omega^2 - \omega_0^2)}$$

代入公式 (6), 得到无阻尼的定解

$$\xi = \frac{F_a}{M_m} \frac{\cos \omega_0 t - \cos \omega t}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

与复数方法所得完全一致。可以验证，在有阻尼的情形下，实数解（8）也与复数解（3）等价。

虽然，“条条道路通罗马”，但无疑复数运算比实数运算简洁得多，且不易出错。

第二章 弹性体振动学

引自: <http://xlwangnu.blog.163.com/blog/static/190719270201191375342967/>

一维振动系统的力阻抗

Mechanical impedance in one-dimensional systems of vibration

南京大学声学研究所 王新龙

力（机械）阻抗的概念非但适用于集总参数振动系统，也适用于弹性连续体振动系统。运用力（机械）阻抗，不仅可简化弹性体振动与波的相关数学分析，而且可以更有效地把握系统的整体振动性质。尤在处理边界或耦合振动等问题时，力（机械）阻抗分析法简洁高效，物理意义清晰。本文试以固体棒之纵振动为例说明力（机械）阻抗的定义及其在实际问题中的应用。

定义

设沿 x 方向的棒横截面积为 S ，杨氏模量为 E 。根据胡克定律，棒的任意断面受如下的应力：

$$F = -ES \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

其中 ξ 表示棒的纵向位移，是棒中位置 x 是时间 t 的函数： $\xi = \xi(x, t)$ 。为达到力平衡，必须存在 $-F$ 的“外力”克服此应力，使其产生速度 v 。一如集总参数系统，定义位于 x 断面处的力（机械）阻抗（mechanical impedance）为：

$$Z_m = \frac{F}{v}, \left(v = \frac{\partial \xi}{\partial t} \right) \quad (2-1-1)$$

注意，（1）此处的声学量均用复数表示；（2）力是有方向的，而定义中假设力的方向指向 x 正向；（3）一般而言，力阻抗是空间位置 x 的函数。

对于棒中频率为 ω 、波数为 k 的正向行波，

$$\xi = A e^{j(\omega t - kx)}, \left(k = \frac{\omega}{c} \right)$$

根据定义，立即得到行波的力（机械）阻抗

$$Z_m = \frac{ES}{c} = \rho c S, \left(c^2 = \frac{E}{\rho} \right) \quad (2-1-2)$$

其中 ρ 是棒材密度， c 是棒的纵波声速。可见，行波力（机械）阻抗是常数，且为纯阻，为材料的特性阻抗（密度和声速之积） ρc 与棒的横截面积 S 之积。行波力阻抗之所以呈现阻性，盖因随波传播而有能量传递之故。反向行波的力阻抗与（2）式给出的符号恰相反。

例一，一端自由、一端受迫驱动棒。设 $x=0$ 是自由端、 $x=l$ 端受频率为 ω 的简谐力 F 的驱动。棒的位移表达式为

$$\xi = A \cos kx e^{j\omega t}$$

其中 A 是幅度常数，与外力振幅和棒参数有关【1】。代入定义公式(2-1-1)，并注意外力作用在 $x=l$ 面的负方向，故而在 $x=l$ 处的力阻抗为

$$Z_m|_{x=l} = \frac{-F}{v} = \frac{ES(-kA) \sin kl e^{j\omega t}}{j\omega A \cos kl} = j\rho cS \tan kl$$

可见，在驱动端棒的力阻抗是纯抗。力阻抗呈现为抗性乃驻波的一般性质，表明波能既未损耗，也未传播至棒外，而储存于棒中。如果在 $x=0$ 端有外力 $F=F_a \exp(j\omega t)$ 作用其上，则位移响应为

$$\xi|_{x=0} = \frac{F_a e^{j\omega t}}{j\omega Z_m|_{x=0}} = \frac{F_a e^{j\omega t}}{(j\omega) jZ_0 \tan kl} = -\frac{F_a e^{j\omega t}}{\omega^2 M_s} \frac{kl}{\tan kl}$$

其 $M_s = \rho l S$ 是棒的质量。这与直接通过边界条件方法求得的结果一致。对于驱动 F 而言，因频率的不同，棒既可以表现为惯性，也可以表现为弹性。对于短棒（棒长 l 远小于波长 $\lambda=2\pi/k$ ，即 $kl \ll 1$ ）， $\tan kl \approx kl$ ，上式可近似为：

$$Z_m|_{x=l} \approx j\rho cSkl = j\omega \rho l S = j\omega M_s, (M_s = \rho cS)$$

即，棒可视为质量为 M_s 质点。如果棒长是半波长的整数倍（ $kl=n\pi$ ），即驱动频率 ω 正好等于棒的简正频率，则力阻抗 Z_m 为零，外力“感受”不到棒的反作用，因而发生强烈的共振。

例二，一段固定、一段受迫驱动棒。设 $x=0$ 端固定，而 $x=l$ 端受频率为 ω 的简谐力 F 的驱动。棒的唯一表达式为

$$\xi = A \sin kx e^{j\omega t}$$

其中 A 是幅度常数，与外力振幅和棒参数有关【1】。代入定义公式(2-1-1)，并注意外力作用在 $x=l$ 面的负方向，故而在 $x=l$ 处的力阻抗为

$$Z_m|_{x=l} = \frac{-F}{\xi_t|_{x=l}} = \frac{ESkA \cos kl}{j\omega A \sin kl} = -j\rho cS \cot kl$$

可见，棒的力阻抗也是纯抗。对于低频短棒（ $kl \ll 1$ ）， $\cot kl \approx 1/(kl)$ ，则

$$Z_m|_{x=l} \approx -j \frac{\rho cS}{kl} = -j \frac{ES}{\omega l} = -j \frac{K}{\omega}, \left(K = \frac{ES}{l} \right)$$

即，棒可视为弹性常数为 K 的弹簧。

边界与力阻抗连续

在棒的任意边界处，棒位移和作用在横截面上的力连续【2】，而位移的连续必有速度的连续。因此之故，在边界（不妨设 $x=0$ ）处，左侧（ $x=0^-$ ）的力阻抗 Z_m 和右侧（ $x=0^+$ ）的力阻抗 Z_m 必然相等：

$$Z_m|_{x=0^-} = Z_m|_{x=0^+}$$

所以，**边界上力阻抗连续**。此结论之成立，不论边界两侧截面之大小以及两侧棒材料性质之异同，为处理复合棒振动提供了莫大的方便。例如，对于 $x=l$ 端系有质量 M_e 的棒而言，边界条件可表示为阻抗连续：

$$Z_m|_{x=l} = j\omega M_e \quad (2-1-3)$$

阻抗转移公式

设棒均匀，即棒的横截面、密度和杨氏模量均为常数，其纵振动的位移场可表为

$$\xi = A(e^{j(\omega t - kx)} + re^{j(\omega t + kx)})$$

其中第一项是正向传播的波，第二项是反向传播的波，系数 r 描述反向波相对于正向波的幅度大小（一般是复数，或称反射系数）。根据定义，得到任意位置 x 处的力阻抗为

$$Z_m = \rho c S \frac{e^{-jkx} - re^{jkx}}{e^{-jkx} + re^{jkx}} \quad (2-1-4)$$

假如已知 $x=l$ 处的力阻抗，则得到方程

$$\rho c S \frac{e^{-jkl} - re^{jkl}}{e^{-jkl} + re^{jkl}} = Z_m|_{x=l}$$

从中求得

$$r = e^{-2jkl} \frac{\rho c S - Z_m|_{x=l}}{\rho c S + Z_m|_{x=l}}$$

代入(2-1-4)式，可以求得任意位置 x 处的力阻抗。特别是在 $x=0$ 处，

$$Z_m|_{x=0} = Z_0 \frac{Z_m|_{x=l} + jZ_0 \tan kl}{Z_0 + jZ_m|_{x=l} \tan kl}, (Z_0 = \rho c S) \quad (2-1-5)$$

其中 Z_0 是棒的参考阻抗。此即所谓的**力阻抗转移公式**：已知彼处的力阻抗，可获知此处的力阻抗。

例一、长为 l 、一端自由的棒，自由端的力阻抗为 0 ，则根据公式(2-1-5)其另一端的力阻抗为

$$Z_m = jZ_0 \tan kl$$

与前述直接求得的一致。

例二、对于 $x=l$ 处附加质量 M_e 的棒而言，该端的力阻抗由公式(2-1-3)的惯性抗给出，代入上式可求得 $x=0$ 处的力阻抗：

$$Z_m|_{x=0} = j\rho cS \frac{\omega M_e + \rho cS \tan kl}{\rho cS - \omega M_e \tan kl} = jX_m$$

$$X_m = \rho cS \frac{\omega M_e + \rho cS \tan kl}{\rho cS - \omega M_e \tan kl} = \rho cS \frac{klM_e + m \tan kl}{m - klM_e \tan kl}, (m = \rho Sl)$$

此为一纯抗 X_m ，其中 m 是棒的质量。从中可以清楚地理解质量负载对输入端 ($x=0$) 力学性质的影响：(a) 如果 $kl=n\pi$ (棒长是半波长的整数倍)，则 $X_m=\omega M_e$ ，仿佛棒不存在而质量直接附加在 $x=0$ 端；(b) 对于短棒 ($kl\ll 1$)，力抗 X_m 可近似为

$$X_m \approx \rho cS \frac{klM_e + mkl}{m - M_e(kl)^2} \approx \omega(m + M_e)$$

即为棒的质量和附加质量惯性抗之和；(c) 如果 $kl=(2n-1)\pi/2$ ，($n=1, 2, 3, \dots$)，则

$$X_m = -\frac{(\rho cS)^2}{\omega M_e}$$

它表明，对于输入端 $x=0$ 而言，棒和附加的负载质量复合而成的系统相当于一个弹性系数 $K_m = (\rho cS)^2/M_e$ 的弹簧！

要强调的是，力阻抗转移公式之适用条件是均匀棒。

边界力阻抗连续和均匀棒力阻抗转移公式构成了分析复合系统声学性质的强有力手段。

【1】参见杜功焕等编著《声学基础》76-77页。

【1】参见杜功焕等编著《声学基础》77页例7。

引自: <http://xlwangnu.blog.163.com/blog/static/190719270201191064957725/>

共振负载對棒纵振动的影響

On the effect of a resonant load on the longitudinal vibration of a rod

南京大学声学所 王新龙

棒的边界条件决定简正频率和简正模式结构。在固定或自由边界条件下，简正频率之间成简单的倍数关系，简正模式结构相对简单。但是，在其它边界条件下，简正频率一般成非倍数关系，且模式结构要复杂得多；一端自由而另一端存在有限质量 M 负载的棒的纵振动，即为其中一例【1】。本文拟进一步把简单质量负载的边界条件推广到具有集总参数共振结构负载的情形，首先分析此种边界结构如何改变棒的简正模式和频率，再分析受迫驱动下系统响应及其特点。此外，本文通篇采用等效质量方法，再次证明了等效方法在分析诸如此类问题中的高效和简捷。

设长 l 的棒置于 $x=0$ 和 l 之间，一端 ($x=0$) 自由，另一端 ($x=l$) 系弹性系数为 K 的弹簧，弹簧又系于质量 M ，如图一所示。此振动系统的导纳型类比线路示于图右下方。根据等效质量方法，弹簧 K 和质点 M 构成的振动子系统可以用等效质量 M_e 描述：

$$M_e = \frac{M}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}, \quad \left(\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}}\right) \quad (1)$$

其中 ω_0 是弹簧-质点子系统的固有频率， ω 是系统的实际振动频率。如此，棒的右端等效为系有负载质量 M_e 的情形，如图一下图所示。根据一端自由而一端有负载质量的棒的纵振动【1】理论，立即得到棒的频率方程：

$$\frac{\tan kl}{kl} = -\frac{M_e}{m}$$

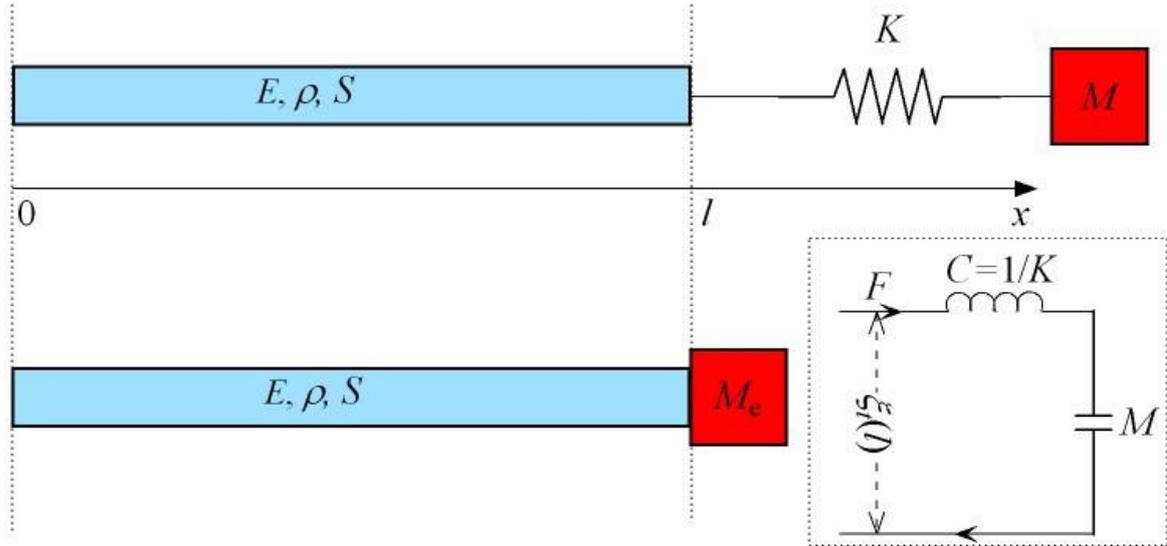
其中 $k=\omega/c$ 是棒中简正波数， c 是棒的纵波声速， m 是棒的质量 ($m=\rho Sl$)。把等效质量表达式 (1) 代入上式，得到如下频率方程：

$$kl \cot kl = -\frac{m}{M} \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \right]$$

统一用波数 $k=\omega/c$ 来取代频率 ω ，则上式可改写为

$$kl \cot kl = -\frac{m}{M} \left[1 - \left(\frac{kl}{k_0 l} \right)^2 \right], \quad \left(k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{\omega_0}{c} \right) \quad (2)$$

式中， k_0 是与固有频率 ω_0 对应的棒中波数， λ_0 是相应的波长。可见，利用等效质量可使问题的分析大为简化。频率方程(2)存在无穷多个依次从低到高的解： $k_n = \omega_n/c$ ， $n=1, 2, 3, \dots$ 。



图一、一端自由、一端系有弹簧-质点的棒振动系统。

考察最低频率的解 $k_1 = \omega_1/c$ 。假设棒很短，乃致 $l \ll \lambda_1$ ，则 $k_1 l \cot k_1 l \approx 1$ ，从公式(2)可求得最低的简正频率 ω_1 近似

$$\omega_1 \approx \omega_0 \sqrt{1 + \frac{M}{m}} = \sqrt{\frac{K}{m // M}}, \quad \left(m // M = \frac{mM}{m+M} \right)$$

此表明，在满足 $l \ll \lambda_0$ 的低频时，棒近乎质量为 m 的质点，整个系统退化为集总参数振动系统：由弹簧 K 链接的两个质量 m 和 M 。

当然，方程(2)还存在无穷多个高次模式频率解 $\omega = \omega_n$ ($n > 1$)。为求解简正频率谱，令 $z = kl$ ， $z_0 = k_0 l$ ，则方程(2)改写为

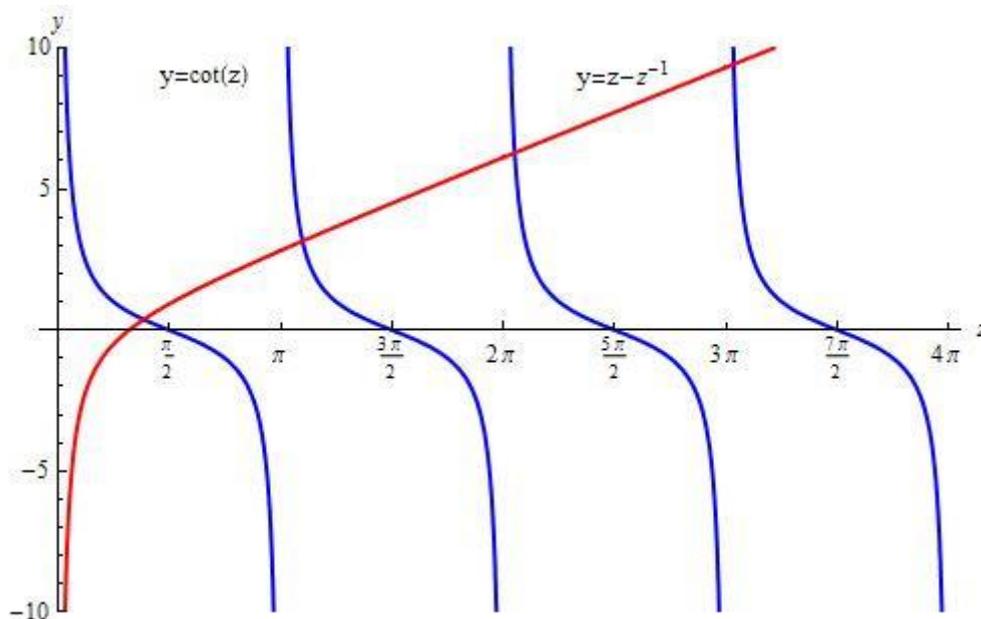
$$\cot z = \frac{1}{\mu z_0} \left(\frac{z}{z_0} - \frac{z_0}{z} \right), \quad \left(\mu \equiv \frac{M}{m} \right) \quad (3)$$

从中获得解 $z = z_n$ ($n=1, 2, 3, \dots$)，从而得到简正波数和简正频率

$$k_n = \frac{z_n}{l}, \quad \omega_n = \frac{c}{l} z_n, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

下图是 $k_0 l = 1$ 、 $m = M$ 情形下非线性方程 (3) 的图形解，它们是 $\cot(z)$ 和 $z - 1/z$ 两条曲线（分别为蓝色和红色）的交点。精确获取 (3) 式的解，必须借助于数值求根方法，如牛顿迭代法等。例如，图二交点对应的数值解为

$$z_n = 1.2078, 3.4482, 6.4410, 9.5305, 12.6458, \dots$$

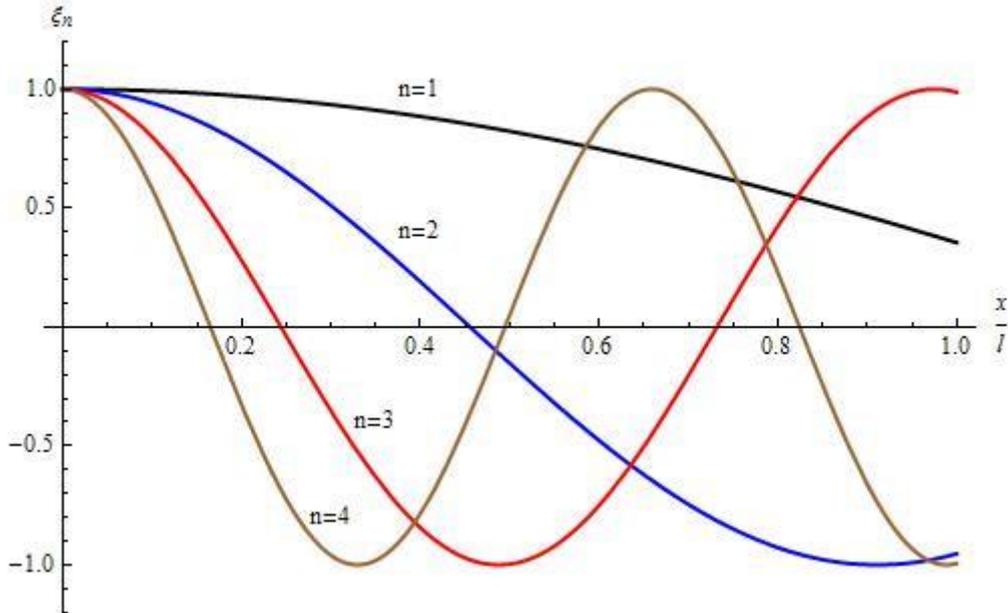


图二、图形解：函数 $y = \cot(z)$ （蓝色）和 $y = z - 1/z$ （红色）的交点。

一旦获得简正波数和频率，就得到满足 $x=0$ 端自由边界条件的棒纵振动的简正模式

$$\xi_n = A_n e^{j\omega_n t} \cos k_n x = A_n e^{j\omega_n t} \cos\left(z_n \frac{x}{l}\right), \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

下图是前四个低频模式的空间波形分布。可见，基模 ($n=1$) 没有波节，它基本上作为整体而振动，几可近似为质点的振动。自由端恒为所有模式之波腹，而负载端一般既非波腹、亦非波节。高次模式 ($n>1$) 的波节和波腹不再等间距。



图三、 $n=1$ （黑色）、 2 （蓝色）、 3 （红色）、 4 （铜色）模式的归一化空间结构。

受迫振动

若 $x=0$ 端非自由，而受外力 $F=F_0 \exp(j\omega t)$ 驱动，则棒发生边界受迫振动，两端的边界条件是

$$\begin{cases} -ES \xi_x|_{x=0} = F, & (F = F_0 e^{j\omega t}) \\ -ES \xi_x|_{x=l} = j\omega M_e \xi_t|_{x=l} \end{cases}$$

其中 E 是棒的杨氏模量， S 是棒的横截面积。设棒的解具有空间形式 $A \cos(kx) + B \sin(kx)$ ，代入上列边界条件求出待定系数 A 和 B ，最后得到位移和速度解

$$\begin{aligned} \xi &= -\frac{F}{ESk} \frac{m \cos k(x-l) + (kl) M_e \sin k(x-l)}{m \sin kl + (kl) M_e \cos kl} \\ \xi_t &= \frac{F}{j\omega S} \frac{m \cos k(x-l) + (kl) M_e \sin k(x-l)}{m \sin kl + (kl) M_e \cos kl} \end{aligned} \quad (4)$$

上式分母等于零即为公式 (2) 给出的频率方程。所以，当外部驱动频率等于简正频率时，棒发生共振。

十分有趣的是，如果驱动频率等于弹簧 K -质点 M 子系统的谐振频率 ($\omega = \omega_0$)，则位移解和速度解分别约化为

$$\xi = -\frac{F}{ESk} \frac{\sin k(x-l)}{\cos kl}, \quad \xi_t = \frac{F}{j\rho cS} \frac{\sin k(x-l)}{\cos kl}$$

此为—端驱动、—端固定边界条件下的解。此时，由于等效质量趋于无穷，右端（ $x=l$ ）的位移和速度为零，相当于是固定边界。也就是说，利用谐振子可以抑制棒端面的位移振动，此与抑制机器振动道理相同。

根据（4），得到在 $x=l$ 端的振速

$$\xi_t(l,t) = \frac{m}{m \sin kl + klM_e \cos kl} \times \frac{F}{j\rho cS} \quad (5)$$

根据图一右下图的类比线路，得到质量 M 的速度为

$$v_M = \frac{(j\omega M)^{-1}}{(j\omega M)^{-1} + \frac{j\omega}{K}} \xi_t(l,t) = \frac{\frac{F}{j\rho cS}}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right] \sin kl + kl \frac{M}{m} \cos kl}$$

可见，当 $\omega = \omega_0$ 时，质量 M 的速度一般是有限的，这与 K - M 独立构成单振子不同。

在输入端，根据棒的力阻抗的定义，并利用公式（4），得到输入力阻抗的表达式：

$$Z_m = \left. \frac{F}{\xi_t} \right|_{x=0} = j\rho cS \frac{\omega M_e + \rho cS \tan kl}{\rho cS - \omega M_e \tan kl} = j\omega M_s \frac{\frac{M_e}{M_s} + \frac{\tan kl}{kl}}{1 - \frac{M_e}{M_s} \tan kl} \quad (6)$$

其中 $M_s = \rho lS$ 是棒自身的质量。此公式也可写成

$$Z_m = Z_0 \frac{Z_m|_{x=l} + jZ_0 \tan kl}{Z_0 + jZ_m|_{x=l} \tan kl}, \quad (Z_0 \equiv \rho cS, Z_m|_{x=l} = j\omega M_e)$$

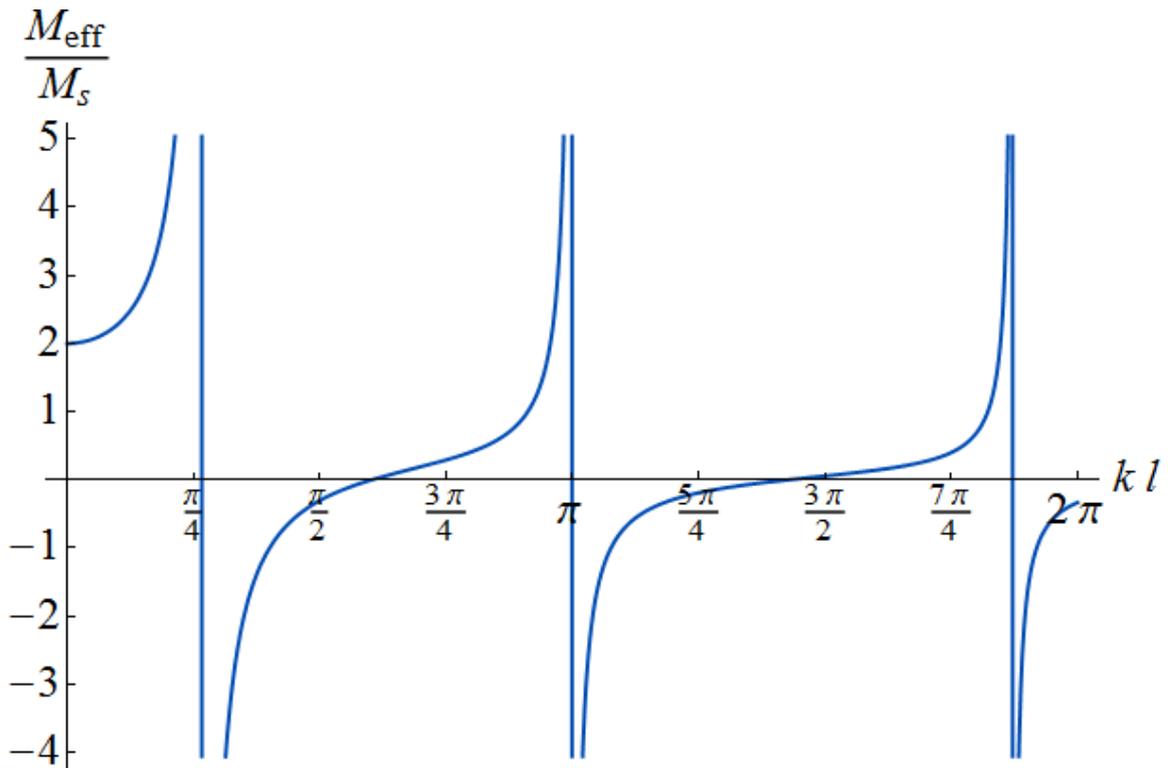
此与力阻抗转移公式所得完全一致。从中可见，输入力阻抗是纯抗性的。此正因为棒中只存在驻波、又不存在损耗之故。如果令公式（6）的分子为零，则 $Z_m=0$ 。分子等于零实际上就是共振条件（2）。可见，共振时输入力阻抗等于零，输入端“短路”。根据公式（6），可以用有效质量 M_{eff} 来描述 $x=0$ 端的振动特性：

$$Z_m|_{x=0} = j\omega M_{\text{eff}}, \quad M_{\text{eff}} = M_s \frac{1 + \frac{M_s \tan kl}{M_e kl}}{\frac{M_s}{M_e} - kl \tan kl} = M_s \frac{1 + \frac{M_s}{M} \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right] \frac{\tan kl}{kl}}{\frac{M_s}{M} \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right] - kl \tan kl} \quad (7)$$

其中，已经应用了公式（1）的 $x=l$ 端有效质量 M_e 的表达式。下图四是有有效质量 M_{eff} 与 kl 的关系曲线。可见，低频时有效质量取正值，且随频率的升高而增大，表明棒-弹簧-质点振动系统在低频时仍呈惯性。在满足方程

$$kl \tan kl = \frac{M_s}{M} \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right]$$

的反共振频率处，有效值质量从正无穷跃变为负无穷，而为负质量；而在满足方程（1）的共振频率处，有效质量为零。



图四、有效质量的频响曲线，参数取值为 $\lambda_0=2l$ ， $M_s=M$ ，其中 $\lambda_0=2\pi c/\omega_0$ 。

【1】杜功焕等《声学基础》第 73 页。

引自：<http://xlwangnu.blog.163.com/blog/static/190719270201183011716360/>

局域共振對弦波傳播的影響

Effect of local resonance on wave propagation on a string

南京大學聲學研究所 王新龍

弦上波動理論非但本身具有重要應用價值，而且是理解一維波動問題（如管道中平面聲波等）之理論基礎。根據達朗貝爾解，均勻無限長弦上的波可分解為相反方向傳播的行波。但若弦非均勻，或存在異物，則會影響行波之傳播，產生波的反射與透射現象。本文探討弦上某處附有局域共振（locally resonant）結構情形下的弦波傳播問題。文中採用有效質量方法求解，簡潔明了，有助於理解所涉的聲學過程與機理。

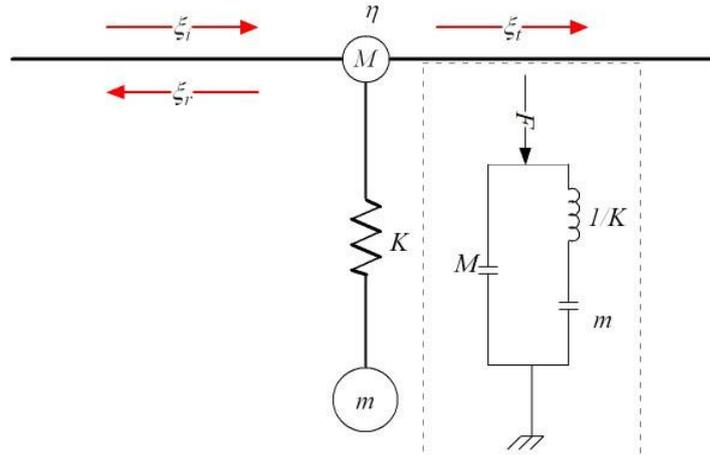
設有無限長弦，在 $x=0$ 處係有質量 M 的質點，該質點又經彈性係數為 K 之彈簧懸掛質量為 m 的另一質點，構成複合質點振動系統，如圖一左圖所示。入射的弦波 ξ_i 行至 M 處，一部分被反射，形成反射波（reflected wave） ξ_r ，另一部分則透過 M ，形成透射波（transmitted wave） ξ_t 。不失一般性，假定入射波（incident wave）的振幅為 1，入射波 ξ_i 、反射波 ξ_r 和透射波 ξ_t 分別具如下形式：

$$\xi_i = e^{j(\omega t - kx)}, \quad \xi_r = r e^{j(\omega t + kx)}, \quad \xi_t = \tau e^{j(\omega t - kx)}, \quad \left(k = \frac{\omega}{c} \right) \quad (1)$$

其中 ω 是波的頻率， k 是波數， c 是波速， r 是反射波 ξ_r 相對入射波 ξ_i 的大小——反射係數， τ 是透射波 ξ_t 相對入射波 ξ_i 的大小——透射係數。注意，反射係數 r 和透射係數 τ 一般是複數量。所以，質量 M 之左側的入射區域，弦的波是入射波 ξ_i 與反射波 ξ_r 的疊加，而右側僅有透射波 ξ_t ：

$$\xi = \begin{cases} \xi_i + \xi_r = e^{j(\omega t - kx)} + r e^{j(\omega t + kx)}, & (x < 0) \\ \xi_t = \tau e^{j(\omega t - kx)}, & (x > 0) \end{cases}$$

此解既滿足弦的波動方程，又滿足無窮遠處的邊界條件：在 $x \rightarrow -\infty$ 處，有正向的行波 ξ_i 作為入射波射入，在 $x \rightarrow +\infty$ 處，無反射波。左圖虛線圍起部分乃 M-K-m 力學系統之導納型等效線路



圖一、左圖：附著在弦上的質點振動系統，右圖：懸掛處的類比線路。

以下借助於**有效質量**概念描述集總參數系統對弦波傳播的影響。根據《[有效質量與有效彈性](#)，[負質量與負彈性係數](#)》一文，質點 \$M\$ 的有效質量 \$\square_{\text{eff}}\$ 為

$$M_{\text{eff}} = M + \frac{m}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}, \quad \left(\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}\right) \quad (2)$$

其中 \$\omega_0\$ 是 \$m\$-\$K\$ 子系統的共振頻率。有效質量 \$\square_{\text{eff}}\$ 在左右兩邊弦的張力 \$T\$ 的作用下產生位移為 \$\eta\$ 的振動，其振動方程為

$$M_{\text{eff}} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = T \left. \frac{\partial \xi_i}{\partial x} \right|_{x=0} - T \left. \frac{\partial (\xi_i + \xi_r)}{\partial x} \right|_{x=0} \quad (3)$$

在質點 \$M\$ 處，還應滿足位移連續的邊界條件：

$$\eta = (\xi_i + \xi_r)_{x=0} = \xi_i \Big|_{x=0} \quad (4)$$

把形式解 (1) 代入 (3) 和 (4) 式，得到反射係數和透射係數：

$$\begin{cases} r = \frac{R_0 - (R_0 + j\omega M_{\text{eff}})}{R_0 + (R_0 + j\omega M_{\text{eff}})} = -\frac{1}{1 + \frac{2R_0}{j\omega M_{\text{eff}}}}, \\ \tau = \frac{2R_0}{R_0 + (R_0 + j\omega M_{\text{eff}})} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega M_{\text{eff}}}{2R_0}}, \end{cases} \quad (R_0 = \rho c) \quad (5)$$

其中 \$R_0\$ 是弦的特性阻抗，\$\rho\$ 是弦的線密度。由此可見，當 \$m\$-\$K\$ 子系統發生共振時，有效質量無窮大，反射係數等於 1，入射波全反射。相反，當

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{m}{M}} \quad (6)$$

時，有效質量等於零，透射係數等於 1，入射波無障礙全透射。

定義歸一化頻率 z 和質點 m 和 M 的力學品質因子 Q 如下：

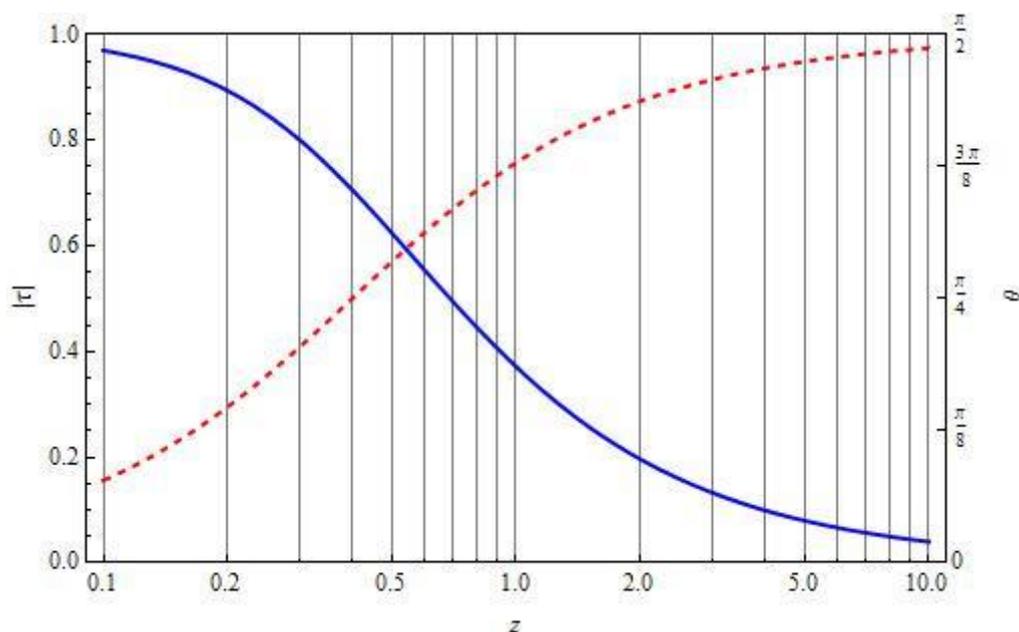
$$z = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad Q_m = \frac{\omega_0 m}{R_0}, \quad Q_M = \frac{\omega_0 M}{R_0}$$

籍此，透射係數可表為如下簡潔的形式：

$$\tau = |\tau| e^{-j\theta} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} jz \left(Q_M + \frac{Q_m}{1-z^2} \right)}, \quad \begin{cases} \frac{1}{|\tau|} = \sqrt{1 + \frac{1}{4} z^2 \left(Q_M + \frac{Q_m}{1-z^2} \right)^2} \\ \theta = \arctan \left[\frac{z}{2} \left(Q_M + \frac{Q_m}{1-z^2} \right) \right] \end{cases} \quad (7)$$

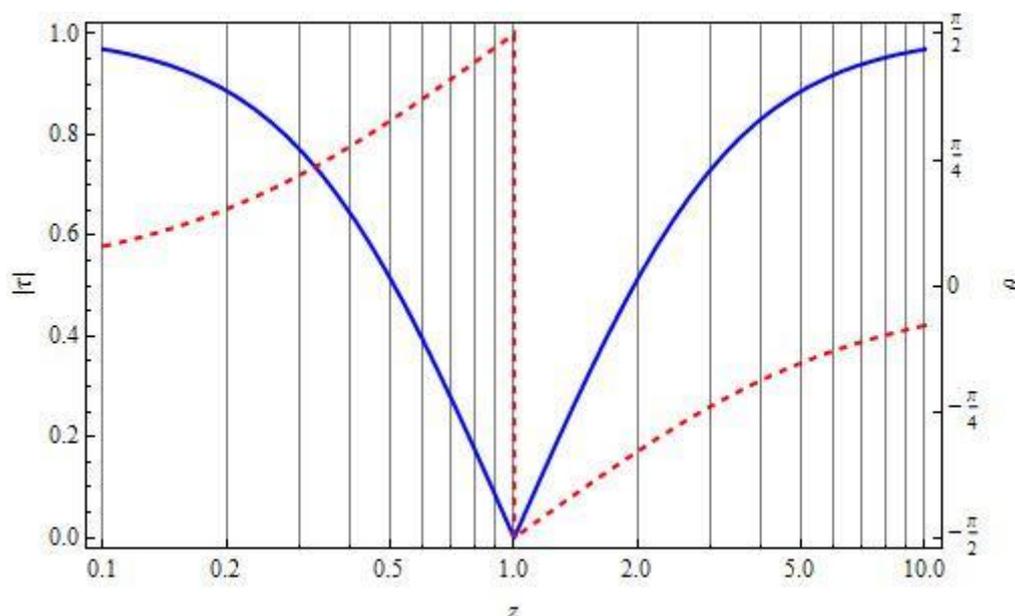
其中 θ 是透射係數的相位。

首先，考察 K - m 子系統不存在之情形。此時， $M_{\text{eff}} = M$ ，公式 (7) 仍適用，只要取 $Q_m = 0$ ，而 ω_0 取任意參考頻率（如 1）即可。圖二是此種情形下的透射幅度譜和相位譜。從中可見，由於質量 M 的存在，入射波被反射。隨着頻率的增大，反射愈強，導致透射係數隨頻率衰減愈烈，乃至高頻時趨於零。極高頻時， M 的慣性抗極大；所以，入射波幾乎全反射。



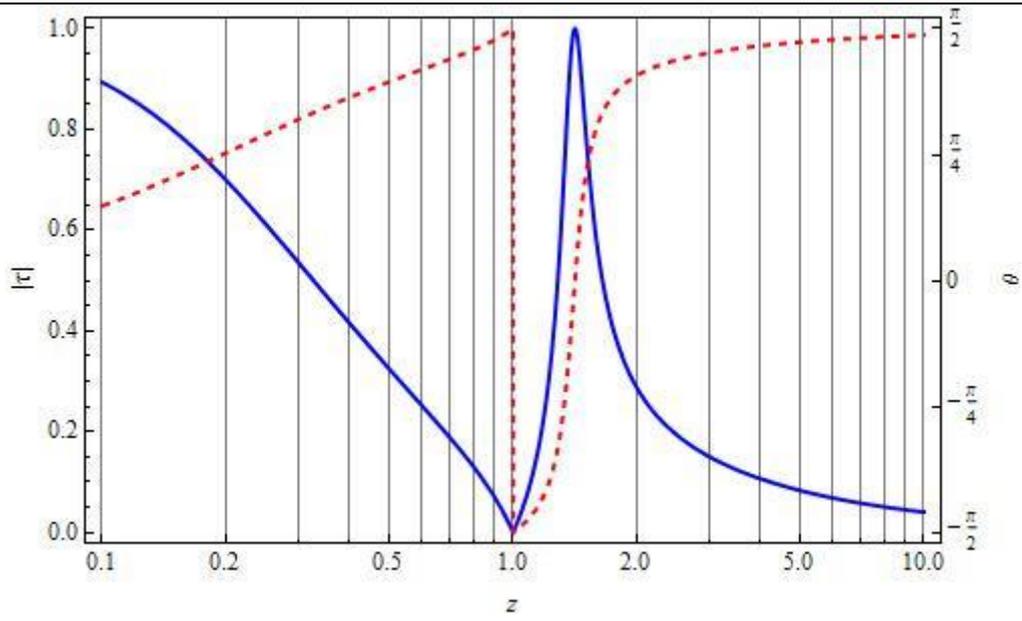
圖二、只存在 M 時的透射譜：藍實線為幅度譜 $|\tau|$ ，紅虛線為相位譜 θ 。參數取值： $Q_m=5$ 。

再看只存在 K_m 振子系統情形。此時雖然 $M=0$ ，但根據公式 (2) 有效質量 μ_{eff} 並不為零，而且在子系統的共振頻率處奇異。有效質量之存在極大地改變了波的透射，如圖三所示。可見，由於 $z=1$ （共振頻率）時，有效質量無窮大，入射波全反射。這是一種共振反射（resonant reflection）。同時，在 $z=1$ 處，透射波的相位發生 180 度的陡降。



圖三、只存在 $K-m$ 振子時的透射譜：藍實線為幅度譜 $|\tau|$ ，紅虛線為相位譜 θ 。
參數取值： $Q_m=5$ 。

最後，考察本文之重點—— M 和 m 共存之情形。下圖四是透射係數的幅度和相位頻譜。與只存在 $K-m$ 子系統所相同的是，在 $z=1$ 處發生全反射。與彼不同的是，在 $z>1$ 某處出現了透射係數為 1 的共振透射（resonant transmission）峰，狀似 [Fano 共振譜](#)。此處，透射係數等於零的現象是一種反共振（anti-resonance），其發生蓋因有效質量無窮大。此時，質量 M 點猶固定邊界，入射波全反射。與此相反，共振全透射之所以發生，因有效質量為零之故。在由公式 (6) 給出的頻率點，若質點 M 及單振子系統均不存在。有意思的是，在反共振處，相位陡降 180 度，但在共振附近，又漸升 180 度。



圖四、透射譜：藍實線為幅度譜，紅虛線為相位譜。參數取值： $Q_M=Q_m=5$ 。

引自：<http://xlwangnu.blog.163.com/blog/static/190719270201391115132887/>

長為 l 的棒一端嵌定一端自由，如果初始時刻使棒具有位移

$\eta|_{x=0} = \frac{\eta_0}{l} x$ ，試求棒作橫振動的位移表達式。

解：所求問題的波動方程和邊界條件分別如下：

$$\frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} + \frac{1}{(Kc)^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0$$

$$\eta|_{x=0} = 0, \eta_x|_{x=0} = 0, \eta_x|_{x=l} = 0, \eta_{xx}|_{x=l} = 0,$$

設解有如下形式： $\eta(t, x) = \eta(x)e^{i\omega t}$ ，代入波動方程，則 $\eta(x)$ 滿足

$$\frac{d^4 \eta}{dx^4} - \kappa^4 \eta = 0, \left(\kappa^2 = \frac{k}{K}, k = \frac{\omega}{c} \right)$$

其通解為：

$$\eta(x) = A \cosh \kappa x + B \sinh \kappa x + C \cos \kappa x + D \sin \kappa x$$

根據 $x=0$ 端的兩個邊界條件，得到如下關係：

$$\eta(0) = A + C = 0$$

$$\eta_x(0) = B\kappa + D\kappa = 0$$

所以， $C = -A, D = -B$ ，如此，

$$\eta(x) = A(\cosh \kappa x - \cos \kappa x) + B(\sinh \kappa x - \sin \kappa x)$$

再根據 $x=l$ 處的兩個邊界條件，得到如下代數方程：

$$\begin{cases} (\cosh \kappa l + \cos \kappa l)A + (\sinh \kappa l + \sin \kappa l)B = 0 \\ (\sinh \kappa l - \sin \kappa l)A + (\cosh \kappa l + \cos \kappa l)B = 0 \end{cases}$$

欲得非平凡解，必使此線性代數方程組之行列式為零，結果得到頻率方程：

$$1 + \cosh \kappa l \cos \kappa l = 0,$$

設其解為 $\kappa = \kappa_n, (n=1, 2, \dots)$ ，對應的簡正頻率為

$$k_n = K\kappa_n^2, \omega_n = c k_n = cK\kappa_n^2, (n=1, 2, 3, \dots)$$

相應的簡正模式為

$$\eta_n(t, x) = A_n \eta_n(x) e^{i\omega_n t},$$

$$\eta_n(x) = \cosh \kappa_n x - \cos \kappa_n x - \frac{\sinh \kappa_n l - \sin \kappa_n l}{\cosh \kappa_n l + \cos \kappa_n l} (\sinh \kappa_n x - \sin \kappa_n x)$$

可以證明，簡正模式是正交的，即

$$\int_0^l \eta_m(x) \eta_n(x) dx = \frac{1}{\kappa_n^4 - \kappa_m^4} \int_0^l \left(\frac{d^4 \eta_m}{dx^4} \eta_n - \eta_m \frac{d^4 \eta_n}{dx^4} \right) dx = l \delta_{mn}$$

其中 δ_{mn} 是 Kronecker-Delta 函數。故而，通解可展成簡正模式的疊加

$$\eta(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \eta_n(x) e^{i\omega_n t}$$

由於 η_n 是實函數，而棒的初速度為零，故 A_n 必是實數。再根據初始位移的條件

$$\eta(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \eta_n(x) = \eta_0 \frac{x}{l}$$

並利用簡正模式的正交性，得到展開式的係數

$$A_n = \frac{\int_0^l \eta(0, x) \eta_n(x) dx}{\int_0^l \eta_n^2(x) dx} = \eta_0 \frac{1}{l} \int_0^l \frac{x}{l} \eta_n(x) dx = \frac{2}{(\kappa_n l)^2} \eta_0$$

最後得到位移解：

$$\eta(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(t, x) = 2\eta_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\kappa_n l)^2} \left[(\cosh \kappa_n x - \cos \kappa_n x) - \frac{\sinh \kappa_n l - \sin \kappa_n l}{\cosh \kappa_n l + \cos \kappa_n l} (\sinh \kappa_n x - \sin \kappa_n x) \right] e^{j\omega_n t}$$

第三章 电-力-声类比

引自：

<http://xlwangnu.blog.163.com/blog/static/190719270201181611208249/>

导纳型力电类比

Mechano-electrical analogy of mobility type

南京大學聲學研究所 王新龍

力有贯穿力学元件之效，似电流经电路元件。欲量测力之大小，非使测力器介入其间不可，犹电流计必串于电路之中。决定力学部件（如质量）运动快慢者，乃该力学部件两端的相对速度差则，犹电学元件两端之电位差。把拾振器附于力学部件即可测量该力学部件（如质量）之速度，测量动作不会对系统的运动产生实际影响，与测电压类似。所以，力类比于电流，速度类比于电压，极顺乎自然。依此，发展了所谓的导纳型力电类比方法。然则，何谓导纳型类比？力阻抗类比于电导纳也！或曰：阻抗与导纳乃相反互逆之概念，数学上互为倒数，何以相互类比？依定义，力阻抗为力与速度之比，而今力类比于电流、速度类比于电压，其比值岂非类比电路之导纳？初学者极易混淆。本文力图阐明其妙，以加深课堂所学。

首先观察电学的 R-L-C 并联电路，如图一（a）所示。图中元件符号的下标“e”表示电学元件，以别于以下标 m 标记的力学元件。在此电路中，总电流 I 在节点处有三个支流，分别流经电容 C_e 、电阻 R_e 和电感 L_e 。由于各元件两端的电压差同为 E ，各支路电流分别为

$$I_C = C_e \frac{dE}{dt}, I_R = \frac{E}{R_e}, I_L = \frac{1}{L_e} \int E dt \quad (1)$$

根据电荷守恒定律，流入的电流 I 等于这些分支流出的电流之和，

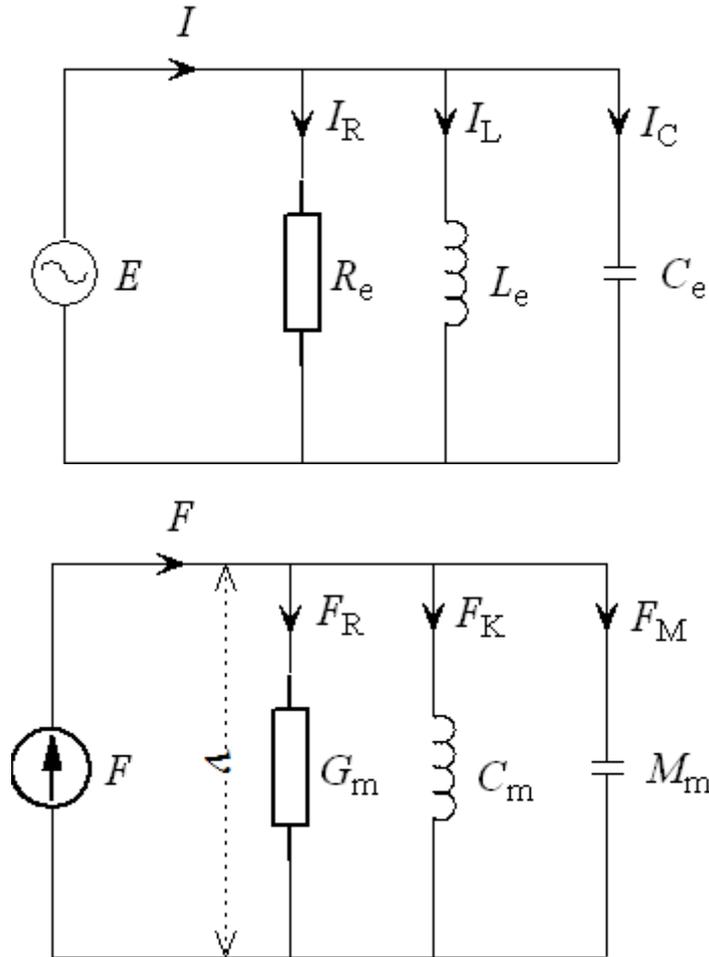
$$I = \sum_{i=C,R,L} I_i = C_e \frac{dE}{dt} + \frac{E}{R_e} + \frac{1}{L_e} \int E dt \quad (2)$$

并联电路的稳态特性可用电导纳 Y_e 刻画：

$$Y_e \equiv \frac{I}{E} = \frac{1}{R_e} + j\omega C_e + \frac{1}{j\omega L_e} \quad (3)$$

因此，电路系统的响应电流与电压差的关系为

$$I = Y_e E \quad (4)$$



图一，(a) R-L-C 并联电路，(b) 单振子 R-M-K 类比并联线路

再考察外力 F 作用下，由力阻 R_m 、质量 M_m 、力顺 C_m 组成的单振子。作用在三个力学元件上的力依次为

$$F_M = M_m \frac{dv}{dt}, F_R = \frac{v}{G_m}, F_K = \frac{1}{C_m} \int v dt, \left(G_m = \frac{1}{R_m}, C_m = \frac{1}{K_m} \right) \quad (5)$$

其中力导 G_m 和力顺 C_m 分别为力阻 R_m 和弹性系数 C_m 的倒数。外力 F 等于三者之和，

$$F = \sum_{i=M,R,K} F_i = M_m \frac{dv}{dt} + \frac{v}{G_m} + \frac{1}{C_m} \int v dt \quad (6)$$

公式 (1) 与 (5) 以及 (2) 与 (6) 形式相同，所以存在如下的类比关系：

$$C_e \rightleftharpoons M_m, R_e \rightleftharpoons G_m, L_e \rightleftharpoons C_m, I \rightleftharpoons F, E \rightleftharpoons v \quad (7)$$

据此，可画出图一 (b) 所示的类比力学线路。力学系统中的力——在线路中称为“力流”——类比于电路中的电流，速度差类比于电压差。要特别强调，是**力导 G_m** 而非力阻 R_m 类比于电阻。图 (a) 和 (b) 两个线路图稍有不同，一

含恒压源，一含”恒流源“。此非本质差异：若对单振子施加恒速 v ，则图 (b) 中的恒流源就被“恒压源”取代；反之亦然。在稳态情形下，类比关系 (7) 表明，

$$R_e \rightleftharpoons R_m^{-1}, \frac{1}{j\omega C_e} \rightleftharpoons (j\omega M_m)^{-1}, j\omega L_e \rightleftharpoons \left(\frac{1}{j\omega C_m} \right)^{-1} \quad (8a)$$

即**力阻、质量（惯性）抗和力顺（弹性）抗悉取倒数**，分别类比于电阻、容抗和感抗。此**反类比**之谓也！因数学上质量（惯性）抗之倒数恰表现为力顺（弹性）抗，而力顺（弹性）抗之倒数恰表现为质量（惯性）抗，故在导纳型类比线路图中迺取电容符号表示质量 M_m 、取电感符号表示力顺 C_m ，而力导 G_m 则仍借用电阻符号。仿电学公式 (3)，可以定义类比线路 (b) 的稳态输入导纳——稳态输入力流除与两端稳态速度差之比。根据 (6)，直接得到此比值

$$Z_m \equiv \frac{F}{v} = j\omega M_m + \frac{1}{G_m} + \frac{1}{j\omega C_m} = R_m + j\omega M_m + \frac{1}{j\omega C_m} \quad (9)$$

而从类比线路来看，上式右端实为各支路导纳之和。可见，虽然所求的是线路的输入导纳，但结果却非它者，而正是力学系统的力阻抗 Z_m ，即**力阻抗 Z_m 类比于电导纳 Y_e** ，

$$Y_e \rightleftharpoons Z_m \quad (8b)$$

反之，**力导纳类比于电阻抗**。此正所谓**导纳型类比**方法。在这种类比中，力阻抗在线路中表现为导纳，或者在线路分析中必须把 Z_m 视为导纳。类比关系 (8) 易令人迷惑，读者须深察其义。对应于 (4) 式，存在如下“力流”与“压差”——速度差——之间的关系，

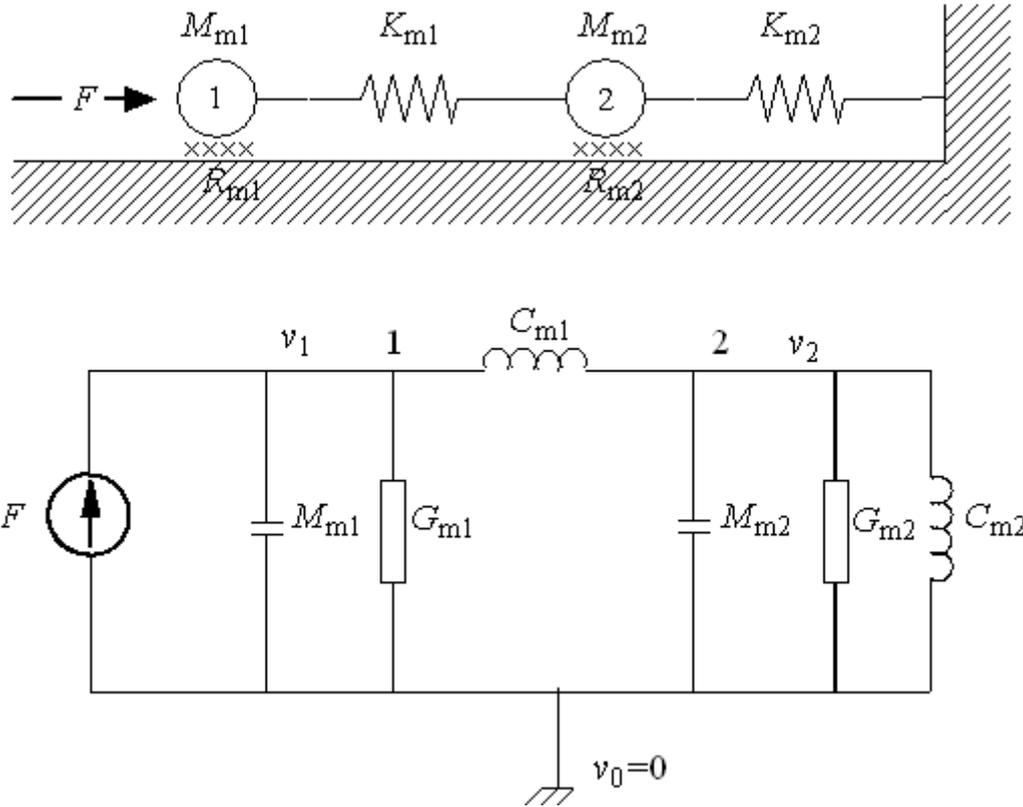
$$F = Z_m v \quad (10)$$

所以， Z_m 确实扮演“导纳”的角色。公式 (2) 实际上就是电路中的基尔霍夫定理，而公式 (6) 是力平衡条件，两者相类比，

$$\sum_i I_i = 0 \quad \rightleftharpoons \quad \sum_i F_i = 0 \quad (11)$$

分别构成电路分析和力学分析之基础。一旦画出如图一 (b) 所示的类比线路图，余下就是严格按照电路分析法求解。

【例】 如下图左图是耦合弹簧质点系统，外力 F 作用在质量 1 上，驱动系统振动，其类比导纳型线路如右图所示。在质量 1 处，外力产生三个并联分支力流，即作用在质量 M_{m1} 上的惯性力，作用在力阻 R_{m1} 的阻力，以及作用在弹簧 C_{m1} 上的弹性力，其中 M_{m1} 类比于电容， $G_{m1}=1/R_{m1}$ 类比于电阻， $C_{m1}=1/K_{m1}$ 类比于电感。“流”经力顺 C_{m1} 之力，又作用在质点 M_{m2} 上，与 M_{m2} 的惯性力、阻力和弹性力相平衡，形成并联力“支流”，其中质量 M_{m2} 类比于电容，力导 G_{m2} 类比于电阻，力顺类比于电容。



图二，上：耦合质点系统，下：类比线路。

根据类比线路图，应用电路理论，可以非常方便地求出耦合系统的一切力学量。只是，在分析类比线路时，切记按电路的方法来处理类比元件。例如，“2”点处的等效导纳是

$$\left(\frac{1}{j\omega M_{m2}}\right)^{-1} + G_{m2}^{-1} + (j\omega C_{m2})^{-1} = R_{m2} + j\omega M_{m2} + \frac{1}{j\omega C_{m2}} = Z_{m2}$$

（并联电路导纳相加）

虽然， Z_{m2} 实际上是力阻抗，但在线路中必须视为“导纳”。该“导纳”与“电感” C_{m1} 串联，两者之总“导纳”是

$$(j\omega C_{m1} + Z_{m2}^{-1})^{-1}$$

（串联电路阻抗相加）

其中括号内的是串联阻抗。此串联导纳又与“电感” M_{m1} 和“电阻” G_{m1} 并联，故系统的总输入“导纳”为

$$\left(\frac{1}{j\omega M_{m1}}\right)^{-1} + G_{m1}^{-1} + (j\omega C_{m1} + Z_{m2}^{-1})^{-1}$$

（并联电路导纳相加）

实际上，它就是力学系统的输入力阻抗 Z_m （电导纳类比于力阻抗），

$$\begin{aligned}
 Z_m &= j\omega M_{m1} + R_{m1} + \left(j\omega C_{m1} + \frac{1}{Z_{m2}} \right)^{-1} \\
 &= j\omega M_{m1} + R_{m1} + \frac{\frac{1}{j\omega C_{m1}} Z_{m2}}{\frac{1}{j\omega C_{m1}} + Z_{m2}}
 \end{aligned}$$

图二的导纳型类比线路，也可转换为阻抗型（正类比）类比线路，其结果当然完全相同。

导纳型与阻抗型类比线路的相互转换

视问题的需要，阻抗型类比线路可以转换为导纳型类比线路；反之亦然。

阻抗型串联线路转换为导纳型并联线路：设有如图三（a）左图所示的阻抗 Z_{m1} 和 Z_{m2} 构成的阻抗型串联线路，“流经”两阻抗的速度“流”为 v ，则此串联线路之总阻抗 Z_m 以及作用其上之力 F 分别为：

$$Z_m = Z_{m1} + Z_{m2}, \quad F = Z_m v \quad (12)$$

两公式也可改写为：

$$\frac{1}{Z_m^{-1}} = \frac{1}{Z_{m1}^{-1}} + \frac{1}{Z_{m2}^{-1}}, \quad v = Z_m^{-1} F \quad (13)$$

在阻抗型电路中， Z_{m1}^{-1} 、 Z_{m2}^{-1} 和 Z_m^{-1} 无疑是相应元件的导纳。现在我们转变观念，“反其道而行之”，把 Z_{m1}^{-1} 、 Z_{m2}^{-1} 和 Z_m^{-1} 当作“阻抗”， F 当作“流”， v 当作“压差”。如此，公式（13）的第一式表明，两并联支路的“导纳”（ $1/Z_{m1}^{-1}$ 、 $1/Z_{m2}^{-1}$ ）之和等于总“导纳” $1/Z_m^{-1}$ ；现在，支路的“阻抗”分别为 Z_{m1}^{-1} 和 Z_{m2}^{-1} ，并联总阻抗为 Z_m^{-1} 。公式（13）的第二式表示力“流” F 在“阻抗” Z_m^{-1} 上产生的“压差”为 v 。如此，下图三（a）左图的阻抗型串联线路转换成了右图的导纳型并联线路。切记，右图中的 Z_{m1}^{-1} 、 Z_{m2}^{-1} 现在是元件的“阻抗”值！颠倒乎？

阻抗型并联线路转换为导纳型串联线路：设有如图三（b）左图所示的阻抗型并联线路，速度“流” v 产生分支，分别“流”经 Z_{m1} 和 Z_{m2} ，系统的输入阻抗 Z_m 以及力（压差）与速度（流）的关系分别为

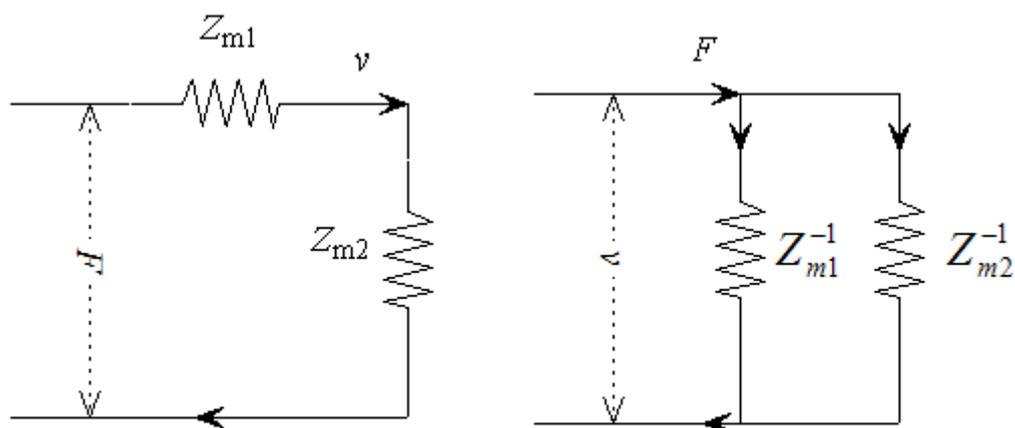
$$\frac{1}{Z_m} = \frac{1}{Z_{m1}} + \frac{1}{Z_{m2}}, \quad F = Z_m v \quad (14)$$

同样，上列公式可写成

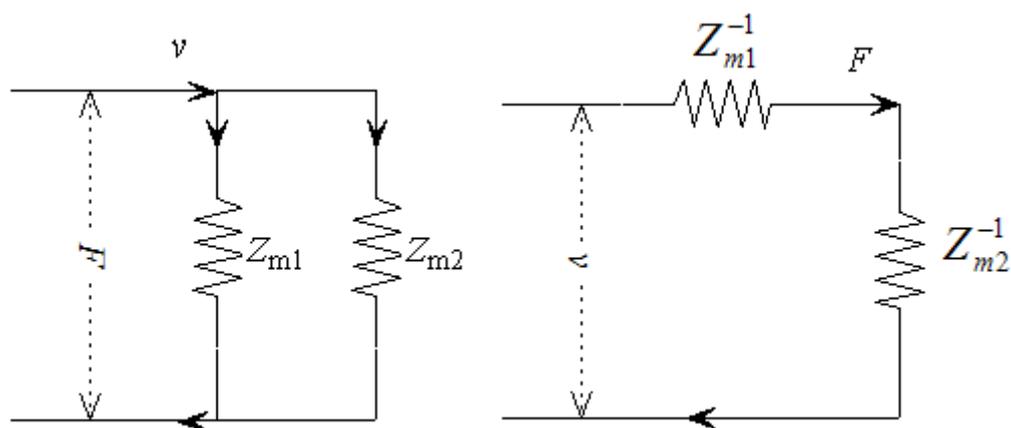
$$Z_m^{-1} = Z_{m1}^{-1} + Z_{m2}^{-1}, \quad v = Z_m^{-1} F \quad (15)$$

现在把 Z_m^{-1} 等视为“阻抗”， F 视为“流”， v 视为“压差”，则公式（15）表示力“流” F 流经“分别为 Z_{m1}^{-1} 和 Z_{m2}^{-1} 的串联线路，总“阻抗”为 Z_m^{-1} ，其两端的“压差”为 v 。如此，即有下图三（b）的阻抗型并联线路（左）转换为导纳型串

联线路（右）。切记，现在在（b）的右图线路中， Z_{m1}^{-1} 和 Z_{m2}^{-1} 分别分别是元件的“阻抗”值！



(a) 阻抗型串联线路（左）转换为导纳型并联线路（右）



(b) 阻抗型串联线路（左）转换为导纳型并联线路（右）

图三、阻抗型线路转换为导纳型线路

反之，可以把导纳型的线路转换为阻抗型的线路。例如，如果上图左边的两图均为导纳型线路，则可分别转换为右图的阻抗型线路。

转换规律：一种类比线路中的串联（并联）元件，转换为另一种类比线路中的并联（串联）元件，其值分别为原串联（并联）元件值的倒数，原线路的“流”与“压差”分别转换为新线路中“压差”和“流”。

引自：<http://xlwangnu.blog.163.com/blog/static/19071927020118297511238/>

有效質量與有效彈性，負質量與負彈性係數

On effective mass and stiffness

南京大學聲學研究所 王新龍

邇來有負質量與負彈性模量等新「概念」，盛行於物理學界。傳統聲學工作者大多不明其裡，以為深奧無比。其實，兩者並未引入新物理，不過把複雜的力學行為用等效慣性或等效彈性描述而已矣。比之於一般所認知的質量和彈性係數，有效質量和等效彈性係數乃動態參量，反映動態力學行為。它們多呈現為振動頻率的函數，取值甚至可負。雖然，這些新「概念」不足以刻畫振動系統的力學本性（慣性與彈性），但作為等效參數分析方法卻可化繁為簡，有助於對複雜振動問題的分析。本文以簡單質點振動系統為例，闡明有效質量和有效彈性的「概念」和分析方法，並介紹「負質量」和「負彈性」之內涵。

眾所周知，刻畫振動系統動態特性的是其力（機械）阻抗 Z_m ，由力阻 R_m 和力抗 X_m 構成： $Z_m = R_m + j X_m$ ；力阻 R_m 消耗能量，力抗 X_m 儲能於系統中。力抗 X_m 本身又是系統慣性和彈性的總體體現，一般是頻率 ω 的複雜函數，可正可負。正的力抗表明系統總體呈慣性，工作在慣性（質量）控制區，而負的力抗則表明系統總體呈彈性，工作在彈性控制區。然而，在有些場合，人們為了處理方便，遂把力抗等效為單一的慣性抗或彈性抗，因而有所謂的**有效質量**或**有效彈性**的概念，正如根據輻射抗定義輻射（同振）質量一般。然而，很多情形下人們對所關注的力抗的性質認識有限，因此在使用有效質量和有效彈性之間模稜兩可。為盡量避免之，要求所定義的有效參量（1）盡量與對應的物理量在概念上保持一致，（2）具有最弱的頻率依賴性（當然最好是與頻率無關的常數）。

一、有效質量

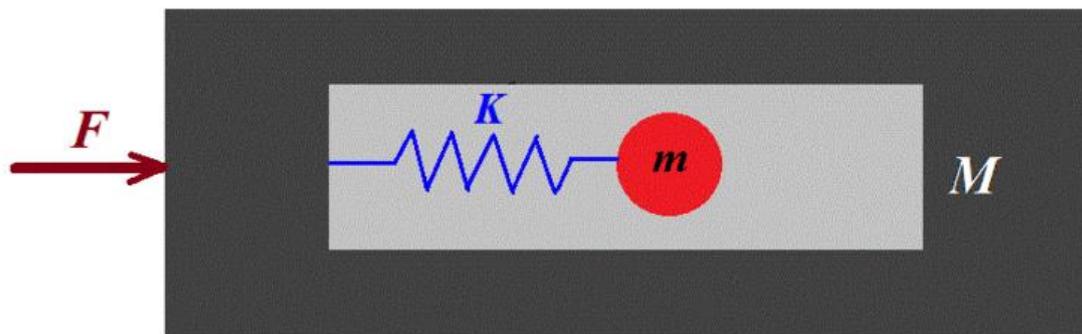
下圖一黑色區域是剛性物，可視為質量為 M 的質點。剛體內隱含空腔，腔中有彈性常數為 K 的彈簧和質量為 m 的小球，構成的彈簧-質點振動子系統；彈簧 K 之一端固定於腔壁，隨剛體而動。外力 F 直接作用於剛體，產生速度 $v(t)$ 。乍視之，系統整體似一質點，總質量 $M + m$ 。但是，牛頓第二定律不成立：

$$F \neq (M + m) \frac{dv}{dt}$$

而須修正為

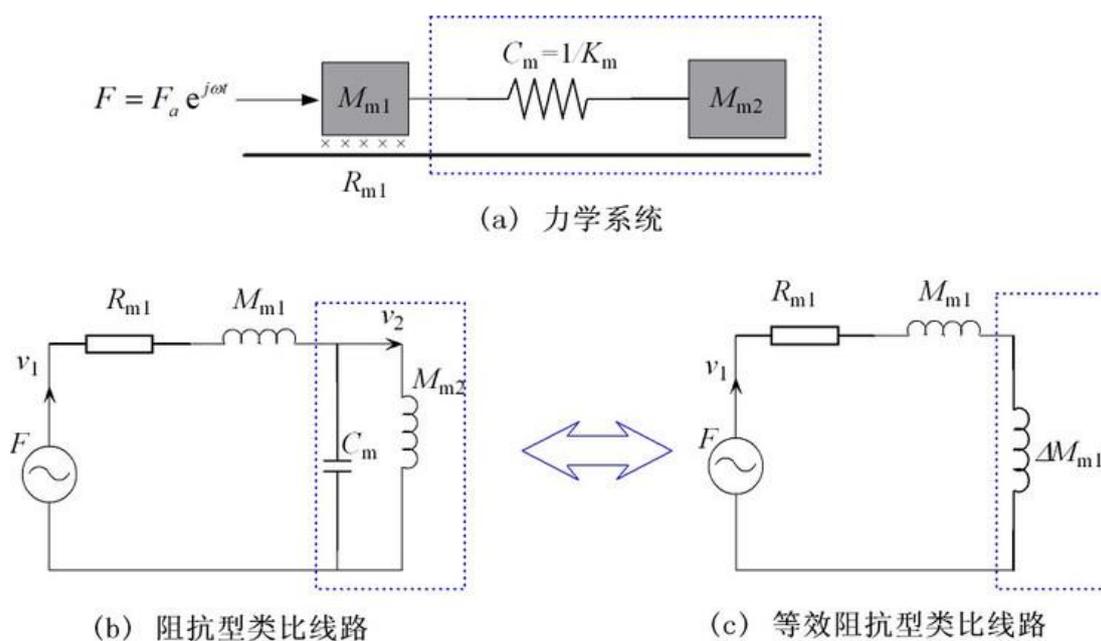
$$F = M_{\text{eff}} \frac{dv}{dt}, \quad (M_{\text{eff}} \neq M_m)$$

式中， M_{eff} 稱為**有效質量**（effective mass）。



圖一、有效質量模型

圖一所示的力學系統可畫成如圖二 (a) 所示的質點振動模型，虛線圍成部份相當於圖一隱藏於腔體的子系統，參數對應關係為： $M=M_{m1}$ ， $m=M_{m2}$ ， $K=K_m$ 。此外，還考慮了作用於 M_{m1} 的力阻。此振動模型的阻抗型類比線路如圖二 (b) 所示。



圖二、彈簧耦合力學振動系統及其類比線路。

設驅動力是簡諧的，頻率為 ω 。根據類比線路，可把輸入機械阻抗 Z_m 分為機械阻和機械抗兩部分

$$Z_m = \frac{F}{v_1} = R_{m1} + j\omega M_{\text{eff}}, \quad j\omega M_{\text{eff}} = j\omega M_{m1} + \frac{1}{j\omega C_m} \parallel j\omega M_{m2}$$

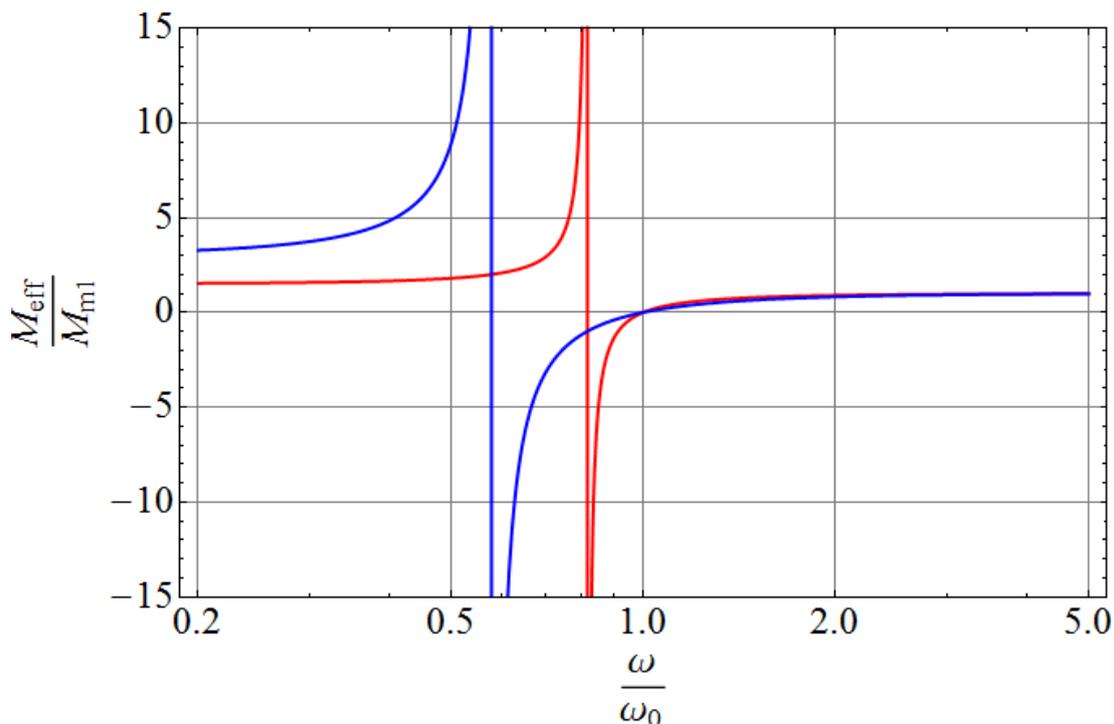
式中，已經把機械抗寫成等效慣性抗的形式。稍作處理，得到有效質量

$$M_{\text{eff}} = M_{m1} + \Delta M_{m1} = M_{m1} + \frac{M_{m2}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2} = M_{m1} \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega^2 - \omega_2^2}$$

$$\left(\omega_0^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2, \omega_i = \frac{1}{\sqrt{M_{m1} C_m}}, i = 1, 2 \right) \quad (1)$$

式中， ω_0 是整個系統的串聯共振頻率，而 ω_2 是 $K_m - M_{m2}$ 子系統的固有頻率，且 $\omega_2 < \omega_0$ 。公式 (1) 表明，內部子振動系統之存在，等效於在 M_{m1} 的質量上增加 ΔM_{m1} 的增量。所以，圖二 (b) 的類比線路等效於圖二 (c) 所示的。當 $\omega = \omega_0$ ，系統發生共振，輸入機械抗 $\text{Im}(Z_m) = 0$ ，故有效質量 $M_{\text{eff}} = 0$ 。而在 $\omega = \omega_2$ 處，僅 $K_m - M_{m2}$ 子系統發生共振；這個共振屬於反共振 (anti-resonance) 類型，子系統的阻抗無窮大， M_{m1} 的位移為零，相當於 M_{m1} 系於固定邊界上，故而等效質量無窮大。顯然，有效質量 M_{eff} 是一個動態 ($\omega \neq 0$) 參量，強烈依賴於頻率 ω 。圖三畫出了此依賴關係，其中紅線和藍線分別對應於 M_{m2} 不同的大小。

紅線： $M_{m1} = 2M_{m2}$ ，藍線： $M_{m2} = 2M_{m1}$



圖三、等效質量與頻率的關係。

從圖三可見：

- 1、**重質量區**： $\omega < \omega_2$

在此低頻範圍，等效質量大於兩質量之和： $M_{\text{eff}} > M_{m1} + M_{m2}$ 。所以，在內部子系統的影響下，整個系統彷彿變重了。只有當 $\omega \rightarrow 0$ 時， $M_{\text{eff}} \rightarrow M_{m1} + M_{m2}$ （系統的靜態總質量）。但當頻率從低趨向反共振頻率 ω_2 時，有效質量趨於正無窮，致使外力 F 無法推動 M_{m1} 。

2、負質量區： $\omega_2 < \omega < \omega_0$

在此頻率範圍內，有效質量是負的： $M_{\text{eff}} < 0$ 。『負質量』意味着質點加速度與外力的方向相反，類於電場力作用下電荷的運動。當頻率 ω 從高降至子系統反共振頻率 ω_2 時，等效質量趨於負無窮：

$$\lim_{\omega \downarrow \omega_2} M_{\text{eff}} = -\infty$$

有效質量為『負』，說明彈性起支配作用。

3、輕質量區： $\omega > \omega_0$

在此高頻區間內，恒有 $M_{\text{eff}} < M_{m1}$ ，即 M_{m1} 彷彿變輕了。極高頻時，才有 $M_{\text{eff}} \approx M_{m1}$ ，彷彿 M_{m2} 不存在。

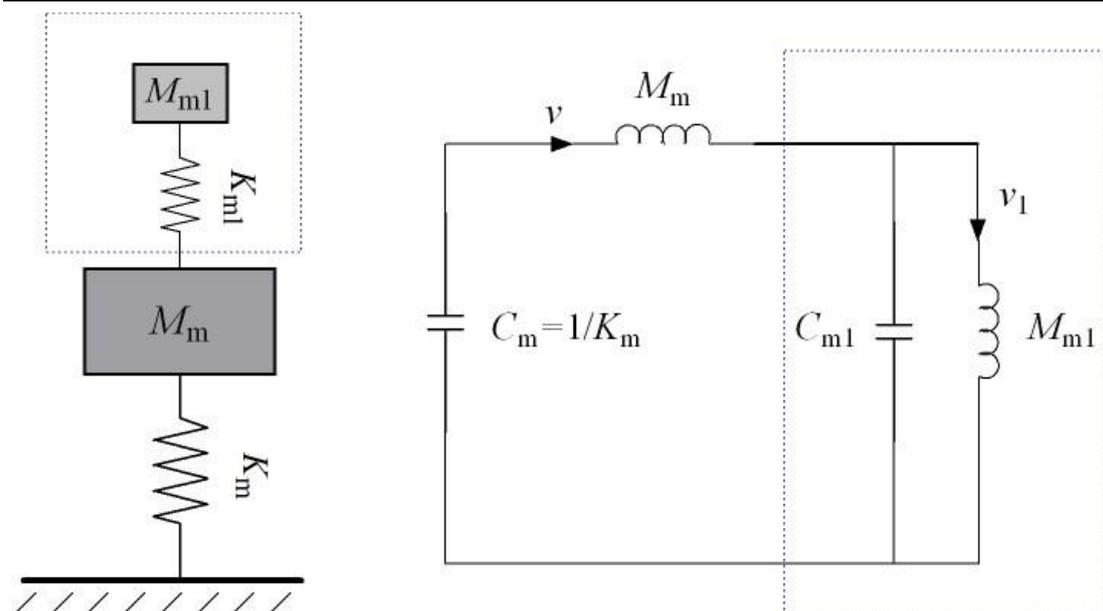
值得注意的極端情形是，子系統的質量 $M_{m2} \rightarrow \infty$ ，相當於彈簧的右端固定，圖二（a）所示的系統退化為由質量 M_{m1} 和彈簧 K_m 構成的單振子。如此則有， $\omega_2 \rightarrow 0$ ， $\omega_0 \rightarrow \omega_1$ 。

$$M_{\text{eff}} \rightarrow M_{m1} \left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega^2} \right) \begin{cases} < 0, & (\omega < \omega_1) \\ = 0, & (\omega = \omega_1) \\ > 0, & (\omega > \omega_1) \end{cases}$$

顯而易見，『負質量』的頻率範圍就是單振子的彈性控制區。只因把彈性效應等效為慣性效應，有效質量自然呈負。因此，『負質量』並非意味着存在新的物理機理，其不過把系統的彈性等效為慣性而已。

例 1、機器震動抑制

下圖四表示質量為 M_m 的機器，其下墊有彈性係數為 K_m 的彈簧（或等效物），以期達到減震目的。但是，機器的質量和下墊的彈簧構成了振動系統，會發出由其固有頻率決定的強烈振動。為減弱此振動的影響，可以在機器上附著一彈簧-質點子系統，如圖虛線內部份所示。子系統的效應，表現在 M_m 的等效質量 M_{eff} 上。設計子系統，使其固有頻率等於機器的固有震動頻率，則有效質量近乎無窮大，從而機器因慣性極大而不易震動，達到抑制震動的目的。



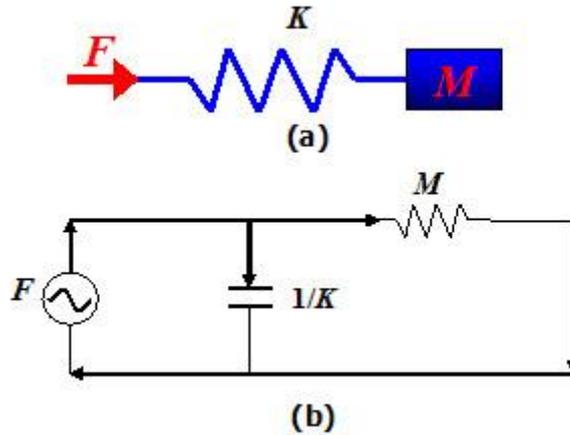
圖四、左圖：附著振動子系統的機器振動系統，右圖：系統的阻抗型類比線路。

例 2、附著有效質量對弦波傳播的影響

例 3、一端自由、一端系由單振子的棒振動

二、有效彈性係數

也可以根據實際情況把力學系統或某子系統的力學性質等效為有效彈性。最甚者莫過於把圖五（a）所示的單振子等效為一個“彈簧”。系統由彈簧 K 和質量 M 組成，外力 F 作用在彈簧之一端，彈簧的另一端連接質量 M 。圖五（b）是其類比電路。這是一個並聯線路，與外力作用於質量 M 的單振子類比線路不同。對外力 F 而言，“接觸”點是彈簧，不是質量；是以，外力 F 自然把所作用的系統視為彈簧！慣性固然起作用，只是把它計入彈性罷了。顯然，從認識論的立場而言，此種武斷等效似有認識“退化”之嫌。



圖五、並聯單振子系統 (a) 及其等效電路 (b)。

假設外力是簡諧的，頻率為 ω ，作用端的位移為 ζ ，質點 M 的位移為 η ，則存在如下力平衡關係，

$$-F = K(\zeta - \eta) = M \frac{d^2 \eta}{dt^2}$$

注意到 $d/dt = j\omega$ ，從上式的第二個等式易得

$$\eta = \frac{K}{K + (j\omega)^2 M} \zeta$$

代入前一方程的第一等式，經整理得到

$$F = -K_{\text{eff}} \zeta, \quad \left(K_{\text{eff}} = K \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}} \right)$$

式中， ω_0 是單振子的固有頻率， K_{eff} 稱為有效彈性係數 (effective stiffness constant)。可見，等效的彈簧仍然服從胡克定律。把圖五 (b) 類比線路的輸入阻抗等效於彈性抗，也可以得到 K_{eff} ：

$$Z_m = \frac{j\omega M \frac{K}{j\omega}}{j\omega M + \frac{K}{j\omega}} = \frac{K_{\text{eff}}}{j\omega}, \quad \left(K_{\text{eff}} = \frac{K}{1 - \omega_0^2 / \omega^2} \right)$$

當頻率 ω 低於固有頻率時，彈性係數是負的——**負彈性係數**。負的彈性稀釋實際上表明系統是慣性起支配作用，物理彈簧 K 的彈性貢獻較小。當 $\omega = \omega_0$ 時，有效彈性係數呈奇異性，表明等效彈簧呈剛性，在力的作用點的位移為零： $\zeta = 0$ 。事實上，固有頻率 ω_0 是系統的反共振 (anti-resonance) 頻率。僅當頻率遠大於固有頻率的高頻時， $K_{\text{eff}} \approx K$ ，因為在高頻時，質量 M 的慣性力是如此之強，以致可視之為靜止不動，系統的彈性幾乎由物理彈簧 K 決定。

誠然，如有必要，也可通過上列力阻抗可把圖五系統等效為一個有效質量：

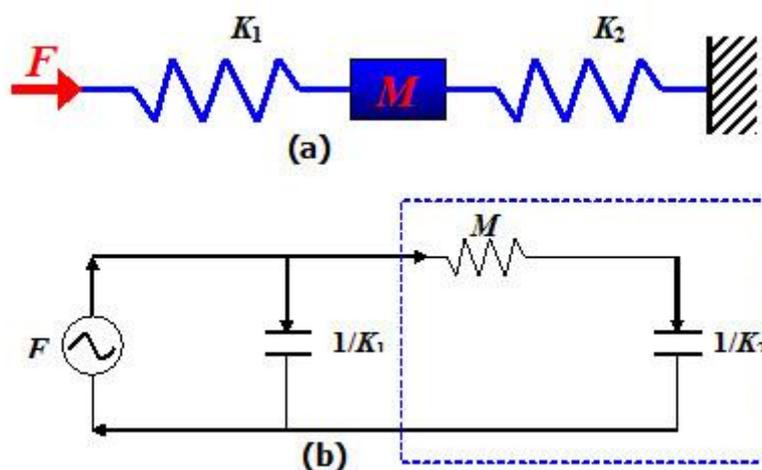
$$Z_m = \frac{j\omega M}{1 - \omega^2/\omega_0^2} = j\omega M_{\text{eff}}, \quad \left(M_{\text{eff}} = \frac{M}{1 - \omega^2/\omega_0^2} \right)$$

實際上，就本例而言，兩種等效皆可。事實上，低頻時等效為質量更自然，高頻時等效為彈簧更可取：

$$M_{\text{eff}} \approx M \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right), \quad (\omega \ll \omega_0)$$

$$K_{\text{eff}} \approx K \left(1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right), \quad (\omega \gg \omega_0)$$

下圖六（a）是一個稍複雜的振動系統，由兩個彈性係數分別為 K_1 和 K_2 的彈簧和一個質量為 M 的質點構成，質點 M 位居其中，分別連接兩個彈簧。彈簧 K_1 的一端施加外力 F ，彈簧 K_2 的另一端固定。當 $K_2 \rightarrow 0$ ，系統就退化為圖五所示的單振子。



圖六，（a）力學振動系統，（b）等效電路圖

可以證明，系統的（靜態）彈性係數為

$$K = \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2}$$

如果 F 是靜力，則胡克定律成立： $F = -K\xi$ ，（ $\xi = \square_1 + \square_2$ ），其中 \square_1 和 \square_2 分別為兩個彈簧的伸長量， \square 是受力點的位移。但是，當 F 是頻率為 ω 的簡諧力時，胡克定律失效。其實，根據圖六（b）的等效線路，得到系統總輸入機械阻抗

$$Z_m = \frac{\frac{K_1}{j\omega} \left(j\omega M + \frac{K_2}{j\omega} \right)}{j\omega M + \frac{K_1}{j\omega} + \frac{K_2}{j\omega}} = \frac{K_1}{j\omega} \frac{\omega^2 - \omega_2^2}{\omega^2 - \omega_0^2} \quad (2)$$

式中，諧振頻率

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K_1 + K_2}{M}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{K_2}{M}}, \quad (\omega_0 > \omega_2)$$

由於忽略了可能存在的力阻， Z_m 是一個純機械抗。顯然，把它等效為一個彈性抗 $Z_m = K_{\text{eff}} / j\omega$ 則十分自然，有效彈性係數 K_{eff} 或其倒數——有效力順 C_{eff} ——為

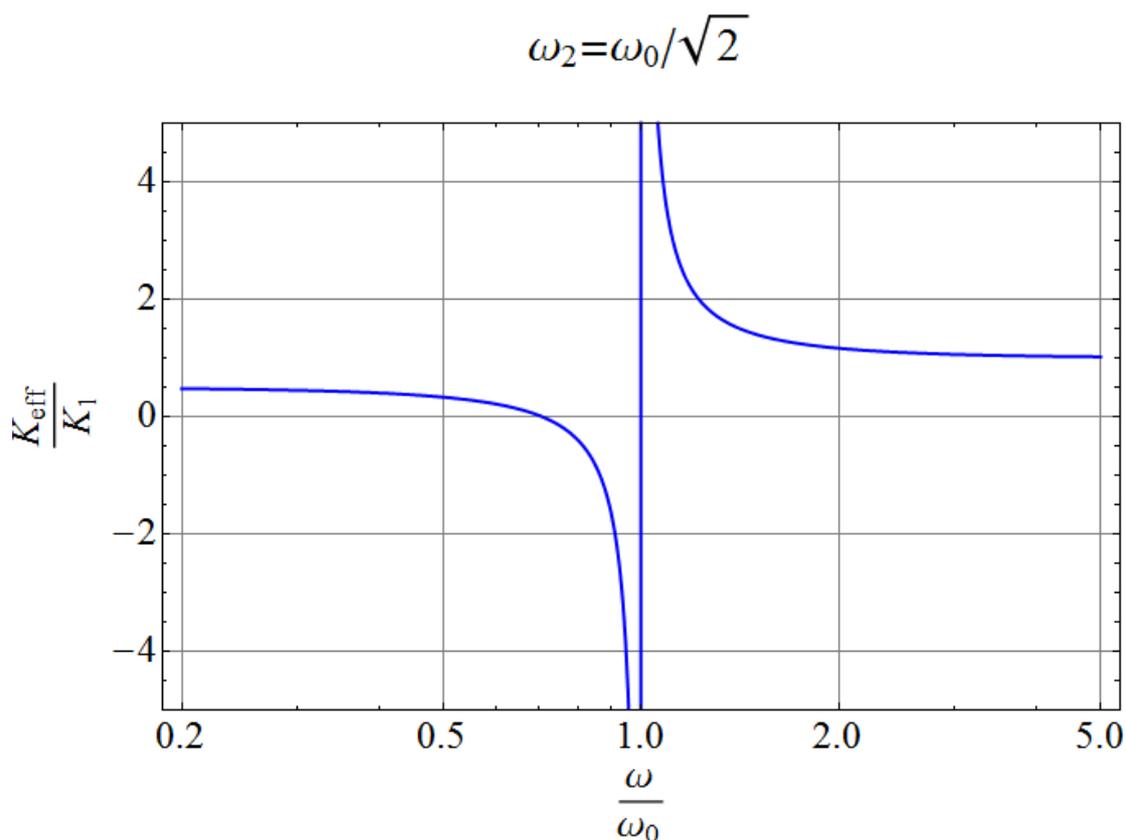
$$K_{\text{eff}} = K_1 \frac{\omega^2 M - K_2}{\omega^2 M - (K_1 + K_2)} = K_1 \frac{\omega^2 - \omega_2^2}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

$$C_{\text{eff}} = C_1 - \frac{C_2}{\omega^2 M C_2 - 1} = C_1 + C_2 \frac{\omega_2^2}{\omega^2 - \omega_2^2}, \quad \left(C_i = \frac{1}{K_i}, i = 1, 2 \right) \quad (2)$$

利用有效彈性係數，胡克定律依然成立，

$$-F = Z_m \dot{v} = \frac{K_{\text{eff}}}{j\omega} \dot{v} = K_{\text{eff}} \xi \quad \rightarrow \quad F = -K_{\text{eff}} \xi$$

與此前不同，本例公式 (2) 所給出的力阻抗 Z_m 不適合於等效為一個慣性（質量）抗 $j\omega M_{\text{eff}}$ ，因為如此得到的有效質量 M_{eff} 具有更複雜的頻率依賴關係。圖七繪出了有效彈性係數的頻率變化關係。



圖七、有效彈性係數隨頻率的變化

從公式 (2) 和圖七可見：

1、軟彈簧區： $\omega < \omega_2$

有效彈性係數是正的，但是 $K_{\text{eff}} < K$ 。低頻時，質量 M 的影響甚小；當 $\omega \rightarrow 0$ （靜態）時， $K_{\text{eff}} \rightarrow K$ （準靜態近似，公式 (8)）。隨著頻率的增高，系統固有的慣性起作用，部分抵消了彈性，使得有效彈性係數單調地降至零。 ω_2 是子系統 $M-K_2$ 的串聯共振頻率。在此共振下，輸入阻抗為零，故而有效彈性係數呈零。

2、負有效彈性係數： $\omega_2 < \omega < \omega_0$

有效彈性係數是負的——**負彈性係數**： $0 > K_{\text{eff}} > -\infty$ 。該區間實際上是慣性控制區間。慣性之大，以致於有效彈性係數呈負性。當頻率從 ω_2 增高到 ω_0 時，有效彈性係數從零趨向負無窮大。要強調的是，此處的 ω_0 是圖七 (b) 中兩個並聯線路的共振頻率，故是反共振頻率。在反共振下，外力作用點的位移響應近乎零，呈剛性，所以有效彈性係數趨向無窮。

3、硬彈簧區： $\omega > \omega_0$

有效彈性係數恆正： $+\infty > K_{\text{eff}} > K_1$ 。而且，當頻率從 ω_0 增高時， K_{eff} 從正無窮大單調減小至 K_1 。高頻時，質量的慣性是如此大，以致可視之為靜止不動。

引自：<http://xlwangnu.blog.163.com/blog/static/19071927020117711127642/>

瑞利的电声类比：声流导率

Acoustic conductivity, an electro-acoustical analog of

Rayleigh

南京大學聲學所 王新龍

电声类比自始至终是瑞利声学研究的显著特点。在其首篇声学论文《共振理论》（*On the theory of resonance*）中，瑞利就采用了电声类比的方法。该文研究了孔径（见下图）流体的振动动能时，瑞利引入的声流导率。在《声学原理》一书【1】中，瑞利作了更系统的阐述。本文介绍瑞利的电导率类比——声流导率。

因流体无旋，其速度 \mathbf{v} 可以用速度势表示 f 表为 $\mathbf{v} = \text{grad}(f)$ 。流体的声动能为

$$\begin{aligned} T &= \iiint \frac{1}{2} \rho_0 v^2 dx dy dz = \frac{1}{2} \rho_0 \iiint (\nabla \phi)^2 dx dy dz \\ &= \frac{1}{2} \rho_0 \iiint [\nabla \cdot (\phi \nabla \phi) - \phi \nabla^2 \phi] dx dy dz \end{aligned}$$

其中 ρ_0 是流体静态密度。虽然伴随声波的是流体媒质的压缩和膨胀，但对于下图所示的小孔流体振动而言，在低频下流体的压缩可忽略不计，即 $\text{div}(\mathbf{v}) = \text{div}(\text{grad}(\phi)) = 0$ 。如此，

$$T = \frac{1}{2} \rho_0 \iiint [\nabla \cdot (\phi \nabla \phi)] dx dy dz = \frac{1}{2} \rho_0 \oiint \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS$$

其中应用了格林定理，闭合面积分指包围小孔的任意曲面。积分曲面可以分为左端流入的面，和右端流出的面（沿墙壁的积分为零），故面积分可以分为左右两部分曲面的积分。在离孔径两端足够远处，速度势几乎是常数，记常数分别为 f_1 和 f_2 ，则上述积分可表为

$$T = \frac{1}{2} \rho_0 (\phi_1 - \phi_2) \iint \frac{\partial \phi}{\partial n} dS = \frac{1}{2} \rho_0 (\phi_1 - \phi_2) U$$

其中 U 是流过孔径的声流：

$$U = \iint \nabla \phi \cdot d\mathbf{S} = \iint \frac{\partial \phi}{\partial n} dS$$

瑞利指出， U 与孔径两端的的速度势 f_1 和 f_2 之差成正比，

$$U = \sigma (\phi_1 - \phi_2)$$

其中比例系数 σ 为流导率（conductivity）。如此，

$$T = \frac{1}{2} \rho_0 \sigma^{-1} U^2$$

可见，动能与流导率成反比。 σ 由孔径之几何参数确定。

图、孔径及其声体积流

瑞利把所考虑的声学问题类比于电学问题：其中流体类比电导体，孔径的边界（隔墙）类比绝缘体。在电学问题中，如果在导体的两端施加电动势，则两端存在电势（电压）差，导致稳态的电流，电流的大小正比于电势（电压）差，比例系数称为电导率。此处，声体积流与速度势差的关系类比于电学中电流与电位势差，而声导率 σ 则类比于电导率，它反映了声流导通性能。

必须注意到，瑞利作上述类比时，前提是声波的波长远大于孔径尺寸，以致于孔径的声流实际上可用流体力学中的稳态流动来近似。所以，孔径作为一个声基本单元，只有动能，没有势能（几乎不可压缩）。瑞利的物理洞悉能力，使他正确地刻画了孔径的声振动特征。

共鸣器是由一个孔径和一个腔体（体积 V ）构成。腔体作为弹性容器存在势能，

$$V_{\text{potential}} = \frac{1}{2} \frac{\rho_0 c_0^2}{V} x^2, \quad (x = \int U dt)$$

其中 x 表示腔体的压缩量。瑞利根据能量守恒定律，得到共鸣器的振动方程，

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{c_0^2 \sigma}{V} x = 0$$

由此得到共振频率：

$$\nu = \frac{c_0}{2\pi} \sqrt{\frac{\sigma}{V}}$$

其中 c_0 是空气声速。可见，共振频率与声导率的平方根成正比，与腔体体积的平方根成反比。对应的波长为

$$\lambda = \frac{c_0}{\nu} = 2\pi \sqrt{\frac{V}{\sigma}}$$

因此，共鸣器产生的波长 λ 仅与共鸣器大小（ V ）的几何参数有关。若共鸣器存在多个孔，而各孔之间互不干涉，则总的声导率为各孔声导率之和。

瑞利对若干典型几何形状的孔径，推导了 σ 的公式。必须注意的是， σ 描述了孔径及其周围的流体运动。只有当孔径的长度 L 远大于孔径的横向尺寸时，孔径周围的流体运动对声导率 σ 的贡献可以忽略，从而有近似

$$\sigma = \frac{S}{L}$$

现代声学工程中，一般采用声压类比电压，而孔径的流体运动用声质量 M_A 来描述。根据声压与速度势的关系：

$$p = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

得到

$$\frac{dU}{dt} = \sigma \left(\frac{d\phi_1}{dt} - \frac{d\phi_2}{dt} \right) = \frac{\sigma}{\rho_0} (p_1 - p_2) \Rightarrow p_2 - p_1 = M_a \frac{dU}{dt}$$

其中，

$$\sigma = \frac{\rho_0}{M_a}$$

这里，声质量 M_A 类比于电感。毫无疑问，此处的声质量 M_A 不仅包含孔径自身的声质量，还包含周围流体运动的诱导（辐射）声质量。

【1】J. W. S. Rayleigh, Theory of Sound, Vol. 2, p172 (Dover Publications, New York, 1945).

第四章 声波的基本性质

引自: <http://xlwangnu.blog.163.com/blog/static/19071927020124372859290/>

非均匀流体的声波方程

Equation of Sound Waves in ideal fluid with inhomogeneity

南京大学声学研究所 王新龙

媒质的非均匀体现为其宏观物理性质（密度、体弹性模量等）或状态变量（如压强等）随空间位置的变化。此处所谓的空间变化，概指宏观意义下的空间连续变化，即媒质性质与状态参量是空间坐标的连续函数。非均匀媒质普存于自然界和人造声材料。通常所谓的均匀介质，其实也是一种理想假设，往往忽略了微弱的非均匀性。所以，研究非均匀媒质中的声传播问题更具普遍性和实际意义。作为对《理想流体声波方程》一文之补充，本文从理想流体基本微分方程出发，详细推导了非均匀媒质的声波方程，以作为对课堂教学之补充。

一、方程的导出

设流体密度为 $\rho = \rho_0 + \delta\rho$ 、体弹性模量为 $\kappa = \kappa_0 + \delta\kappa$ ，压强为 $P = P_0 + p$ ，运动速度为 \mathbf{v} ，其中下标 0 表示无声波时对应的静态量， $\delta\rho$ 和 $\delta\kappa$ 是密度和体弹性模量的扰动， p 是声压。由于密度的不均匀，即 $\rho_0 = \rho_0(x)$ ，

$$\frac{d\rho_0}{dt} = \frac{\partial\rho_0}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\rho_0 = \mathbf{v} \cdot \nabla\rho_0 \neq 0, \quad \left(\rho_0 = \rho_0(x), \quad \frac{\partial\rho_0}{\partial t} = 0 \right)$$

由此得出

$$\frac{\partial p}{\partial t} = c_0^2 \left(\mathbf{v} \cdot \nabla\rho_0 + \frac{\partial\delta\rho}{\partial t} \right) \neq c_0^2 \frac{\partial\delta\rho}{\partial t}$$

即不能由线性化的状态方程 $p = c_0^2 \delta\rho$ 直接求时间偏导数。事实上，根据理想流体状态方程： $P = P(\rho)$ ，有如下流体压强与密度时间变化率的关系，

$$\frac{dP}{dt} = \frac{dP}{d\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{\kappa}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \rightarrow \frac{d\rho}{dt} = \frac{\rho}{\kappa} \frac{dP}{dt}$$

其中利用了体弹性模量的定义。将其代入质量连续性方程，即得流体的体弹性关系

$$\frac{dP}{dt} + \kappa \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1)$$

它反映了流体的压缩膨胀率（容变率）与压强变化率之间的规律。描述流体质点运动的是欧拉方程

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla P = 0 \quad (2)$$

此处忽略了如重力等外力的作用。上列 (1) (2) 方程完全描述了理想流体的运动，其中的时间全导数可用时间偏导数和空间迁移导数表示

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$$

以声波扰动量表示，则方程 (1) 和 (2) 可改写为，

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) (P_0 + p) + (\kappa_0 + \delta\kappa) \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \\ (\rho_0 + \delta\rho) \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} + \nabla (P_0 + p) &= 0 \end{aligned}$$

在线性声学的范畴内，假设扰动量 $\delta\rho$ 、 $\delta\kappa$ 、 p 及 \mathbf{v} 悉为微量，故可对上两式作线性化处理，

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla P_0 + \kappa_0 \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \\ \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla P_0 + \nabla p &= 0 \end{aligned}$$

虽然，如重力等外力可以导致静压的空间分布，但是在相对小的空间范围内，此种变化微乎其微，可略而不计。因此，在本文所考虑的非均匀媒质中，假定静态压强 P_0 是常数（否则，静态时因压力梯度的存在而使流体静态被破坏），但静态密度 ρ_0 和静态弹性模量 κ_0 则可以是空间 \mathbf{x} 的函数： $\rho_0 = \rho_0(\mathbf{x})$ ， $\kappa_0 = \kappa_0(\mathbf{x})$ 。如此，上列方程进一步简化为，

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} p(\mathbf{x}, t) + \kappa_0(\mathbf{x}) \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{\rho_0(\mathbf{x})} \nabla p(\mathbf{x}, t) &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

对 (3) 的第一式求时间偏导数，并利用第二式，得到仅含声压 p 的偏微分方程。隐去时空变量的显式依赖表示，则

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \kappa_0 \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_0} \nabla p \right) = 0 \quad (4)$$

此即非均匀理想流体介质的 (3+1) 维线性声波方程。方程 (4) 也可以取如下的形式，

$$\rho_0 \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \kappa_0 \nabla(\ln \rho_0) \cdot \nabla p - \kappa_0 \nabla^2 p = 0 \quad (4a)$$

方程的第二项正是密度非均匀之故【注一】。从中亦可知，当声波的传播方向（声压梯度的方向）与密度变化方向垂直时，非均匀对声波的传播没有影响。

二、方程的变换

对方程（4）作变换：

$$p(\mathbf{x}, t) = \sqrt{\rho_0(\mathbf{x})} \psi(\mathbf{x}, t) \quad (5)$$

可以消去其中的声压梯度项。在此变换下，声压 p 用波函数 ψ 取代。经演算，得到波函数 ψ 所满足的波动方程，

$$\nabla^2 \psi - \frac{\rho_0}{\kappa_0} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \mu^2(\mathbf{x}) \psi = 0 \quad (6)$$

式中，

$$\mu^2 \equiv \sqrt{\rho_0} \nabla^2 \left(\frac{1}{\sqrt{\rho_0}} \right) \quad (7)$$

相比于均匀介质的波动方程，方程（6）多出了变系数的第三项。对于频率为 ω 的简谐波而言，波动方程（6）进一步简化为

$$\nabla^2 \psi + \left(\frac{\rho_0}{\kappa_0} \omega^2 - \mu^2 \right) \psi = 0 \quad (8)$$

其所描述的正是三维势垒的散射问题。用薛定谔算符

$$\hat{\mathbf{L}} = -\nabla^2 + \mu^2(\mathbf{x})$$

表示，方程（8）可简写为

$$\hat{\mathbf{L}} \psi = k_0^2 \psi, \quad \left(k_0 = \frac{\omega}{c_0} \right)$$

引入声速

$$c_0 = c_0(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{\kappa_0(\mathbf{x})}{\rho_0(\mathbf{x})}}$$

与波数

$$k^2(\mathbf{x}) = k_0^2 - \mu^2(\mathbf{x})$$

如此，方程（8）可表为

$$\nabla^2 \psi + k^2(\mathbf{x}) \psi = 0 \quad (9)$$

此乃变波数的 Helmholtz 方程。显然，所定义的声速 c_0 也是空间的函数。

三、特例之一

极为有趣的是，当密度满足拉普拉斯方程：

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{\sqrt{\rho_0}} \right) = 0$$

时， $\mu=0$ ， $k=\omega/c_0$ ，波动方程（8）与均匀介质无异。在一维情形下，满足上列条件的密度具有如下形式

$$\rho_0(x) = \frac{b}{(x+a)^2}, \quad (b > 0)$$

其中 a 和 b 是任意常数 ($b > 0$)。稍复杂的情形是要求方程（9）中的波数 k 恰为常数，与坐标无关。若是，密度当取

$$\rho_0(x) = \frac{1}{\phi^2(\mathbf{x})}$$

其中，函数 ϕ 必须是如下微分方程的解，

$$\nabla^2 \phi + \left[k^2 - \left(\frac{\omega}{c_0} \right)^2 \right] \phi = 0 \quad (10)$$

假设声速近似为常数【注一】，则上列方程很容易求解，从而得到所需的密度分布。

四、特例之二

最常见的是方程（9）的一维形式，描述了一维连续分层介质中的声波运动。若媒质静态密度是空间周期函数，则 $k(x)$ 也为空间周期函数，方程（9）因而是著名的希尔（Hill）方程，其解遵循 Floquet 定理。最简单的希尔方程是马修（Mathieu）方程

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + k_0^2 \left(1 + a \cos \frac{4\pi x}{\Lambda} \right) \psi = 0, \quad \left(k_0 = \frac{\omega}{c_0} \right) \quad (11)$$

其中 $\Lambda/2$ 是媒质密度的空间周期， a 衡量密度起伏的大小。希尔方程（当然包括马修方程）会发生（空间）参量共振，即当声波波长两倍于空间周期 Λ 时，波在空间上参量（指数）放大或衰减。因此之故，声在周期介质中传播会出现声禁带和通带。在禁带内，声波随距离指数衰减。此属高等专题，此处不论。

【注一】非均匀声波方程（4）中的体弹性模量 κ_0 一般也是不均匀的： $\kappa_0=\kappa_0(\mathbf{x})$ ，但可以通过适当的坐标变换消除之。

引自: <http://xlwangnu.blog.163.com/blog/static/190719270201193104959500/>

理想流体声波方程及其行波解

Equation of Sound Waves and Its Traveling Wave Solution in ideal Fluids

南京大學聲學研究所 王新龍

声现象无时不有，无处不在。流体声波是流体媒质的机械扰动，既遵守流体运动规律，又服从支配流体状态变化的热力学定律。声学量其本质是流体运动量和状态量的扰动量。以声学量取代运动量和状态量，流体运动方程和状态方程转化为声扰动的基本方程。虽然声扰动方程呈非线性，但日常所闻之声多属微扰，故可对扰动方程作线性化处理，从而导出奠定线性声学基础的声波方程。文章最后讨论了线性声波方程的平面行波解，并给出了行波声学量的基本关系。

理想流体概指热导与黏黏性可略而不计的无损耗流体。由于无热传导，声波的压缩膨胀交替过程是绝热的，流体质点的熵是时间常数。众所周知，伴随着声波的压缩与膨胀，流体局部温度必然有升有降，遂形成空间温度场，而相邻空间区域的温差必然导致热导。惟声波的压缩和膨胀交变过程如此快速，以致邻近区域因温差所致的热传导几可忽略不计。黏性是流体内摩擦特性，它把声波宏观有序的机械运动转化为微观无序的分子热运动。对于多数常见流体，而声波频率又不是很高，粘性一般较弱，在有限的时间和空间范围内可忽略不计。

• 流体力学基本方程

设理想流体的密度 ρ ，压力 P ，单位体积有质量源流 $\rho q(\mathbf{x},t)$ 产生，且单位体积受外力 $\mathbf{f}(\mathbf{x},t)$ 的作用。 $q(\mathbf{x},t)$ 是流体的体积产生率。考察流体内某质点，其体积大小为 ΔV ，质量为 $\rho\Delta V$ ，质点速度矢量为 \mathbf{v} 。根据质量守恒定律，在 dt 时间内，该质点质量的增加应等于质量源所产生的，即 $d(\rho\Delta V) = \rho q\Delta V dt$ ，或者，

$$\Delta V d\rho + \rho d(\Delta V) = \rho q\Delta V dt$$

上式也可表为

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{\Delta V} \frac{d(\Delta V)}{dt} = q \quad (1)$$

方程第二项是流体的容变率——单位体积在单位时间的变化。容变定义为体积相对变化大小：

$$d\Delta = \frac{d(\Delta V)}{\Delta V}$$

设 ΔS 为包围 ΔV 的封闭曲面。在 dt 时间内， ΔS 上某面元 $d\mathbf{S}$ 发生位移 $\mathbf{v}dt$ ，导致体积元增量 $(\mathbf{v}dt) \cdot d\mathbf{S}$ 。质点总的体积增量为

$$d(\Delta V) = \oiint_{\Delta S} (\mathbf{v}dt) \cdot d\mathbf{S} = dt \oiint_{\Delta S} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$$

应用高斯定理，得到质点的容变率：

$$\frac{1}{\Delta V} \frac{d(\Delta V)}{dt} = \frac{1}{\Delta V} \iiint_{\Delta V} \nabla \cdot \mathbf{v} dV$$

所以，容变率等于流体速度散度的平均值。但是，流体质点的体积 ΔV 本身极小，其内速度散度几为常数。所以，得到容变率

$$\frac{d\Delta}{dt} = \frac{d(\Delta V)}{\Delta V dt} = \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (2)$$

如此，质点质量守恒方程 (1) 可表为

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{v} = q \quad (3)$$

此即拉格朗日描述下导出的流体的（质量）连续性方程。

体积为 ΔV 的流体质点既受外力 $\Delta \mathbf{F} = \mathbf{f}\Delta V$ 的作用，又受边界以外流体压力的作用：

$$\oiint_{\Delta S} (-P) d\mathbf{S} = - \iiint_{\Delta V} \nabla P dV \xrightarrow{\Delta V \rightarrow 0} -\nabla P \Delta V$$

其中用到标量封闭曲面积分的高斯定理。根据牛顿定律，

$$(\rho \Delta V) \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla P \cdot \Delta V + \mathbf{f}\Delta V$$

消去质点体积 ΔV ，结果为流体运动方程

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla P = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (4)$$

除方程 (3) 和 (4) 之外，尚须加上描述流体状态关系的热力学方程，方能构成描述流体状态运动的封闭方程组（ ρ 、 P 、 \mathbf{v} 三个变量的求解需要三个方程）。在理想流体中，一般认为声波过程是绝热的，故状态方程可表为单变量的函数，例如，以密度 ρ 为状态自变量，则压强可表为

$$P = P(\rho) \quad (5)$$

定义新的状态参量

$$c = c(\rho) = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}} \quad (6a)$$

根据热力学关系， c 和绝热体弹性系数 κ （或绝热压缩系数 $\beta=1/\kappa$ ）之间存在如下重要关系

$$c^2 = \frac{dP}{d\rho} = \left(V \frac{dP}{dV} \right) \left(\frac{1}{V} \frac{dV}{d\rho} \right) = \frac{\kappa}{\rho}, \quad \left(\kappa = \frac{1}{\beta} \right) \quad (6b)$$

对状态方程（5）求时间全导，得到质点运动过程中的状态变化关系：

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{c^2} \frac{dP}{dt}$$

代入连续性方程（3），遂有

$$\beta \frac{dP}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{v} = q(\mathbf{x}, t) \quad (7)$$

其中，利用了关系 $c^2=1/(\rho\beta)$ 。方程（4）和（7）构成了流体质点运动的一对基本方程组。注意，上述方程皆通过“跟踪”流体质点运动而得到的，其中的时间导数当然是拉格朗日描述意义下的的时间导数——全导数。固然，也可直接通过欧拉描述导出方程（4）和（7），只要注意到拉格朗日描述与欧拉描述之间的存在如下时间导数关系

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$$

• 声扰动方程

声波是媒质的机械振动，是媒质在其平衡态附近的扰动。经此扰动，压强 P 、密度 ρ 等诸媒质状态量皆可表为

$$\begin{aligned} P &= P_0 + p(\mathbf{x}, t) \\ \rho &= \rho_0 + \rho'(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (8)$$

其中 P_0 和 ρ_0 是无扰动时的静压和静态密度， $p(\mathbf{x}, t)$ 和 $\rho'(\mathbf{x}, t)$ 是压强的扰动量和流体密度的扰动量。压强扰动量即为声压。描述声扰动的还包括流体速度（质点振速） \mathbf{v} （量值为 v ），密度变化 $\rho' = \rho - \rho_0$ ，温度变化 $\tau = T - T_0$ 等，统称为声学量。须注意，在本文的讨论中，假定媒质是均匀时不变的，故 P_0 和 ρ_0 皆为常数。把（8）式代入（4）和（7），得到一对声学（扰动）量 \mathbf{v} 和 p 的耦合方程：

$$\begin{cases} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla p = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \\ \beta \frac{dp}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{v} = q(\mathbf{x}, t) \end{cases} \quad (9a)$$

或者，根据时间全导数与偏导数的关系，有

$$\begin{cases} \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} + \nabla p = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \\ \beta \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) p + \nabla \cdot \mathbf{v} = q(\mathbf{x}, t) \end{cases} \quad (9b)$$

此外，根据绝热状态方程， ρ 、 β 、 κ 和 c 皆可视为声压 p 的单元函数：

$$\begin{aligned} \rho &= \rho(P) = \rho(P_0 + p) = \rho(p) \\ \beta &= \beta(P) = \beta(P_0 + p) = \beta(p) \\ \kappa &= \kappa(P) = \kappa(P_0 + p) = \kappa(p) \\ c &= c(P) = c(P_0 + p) = c(p) \end{aligned} \quad (10)$$

可见，声扰动量服从的方程组 (9) - (10) 成为非线性方程。所以，**声波本质上是非线性的**。

• 小振幅线性化与线性声波方程

线性声学假设，所有的声扰动量皆为同量级的一阶小量。设 ε 为正小参量： $0 < \varepsilon \ll 1$ 。则所谓一阶小量，意谓

$$\frac{p}{P_0} = O(\varepsilon), \quad \frac{v}{c_0} = O(\varepsilon), \quad \frac{\rho'}{\rho_0} = O(\varepsilon), \quad \frac{\tau}{T_0} = O(\varepsilon), \quad \dots \quad (11)$$

式中， T_0 是静态的温度。在静止流体中，声扰动引起的质点速度 \mathbf{v} 当然是扰动量，也是一阶小量。线性声学仅仅保留 $O(\varepsilon)$ 量级的小量，而忽略了更高量级的。方程 (9a) 或 (9b) 中声学量的对流导数项是 $O(\varepsilon^2)$ 的高阶小量，可略而不计。实际上，就是时间全导数直接用时间偏导数近似：

$$\frac{d}{dt} \approx \frac{\partial}{\partial t}$$

所以，在线性近似下，拉格朗日与欧拉描述几乎等价。在假设 (11) 下，方程 (10) 中的密度 ρ 、压缩系数 β 、体弹性系数 κ 和声速 c 均可展开为声压 p 的函数，例如

$$\begin{aligned}\rho &= \rho(P_0) + \frac{1}{c^2(P_0)} p + \dots \\ &= \rho_0 + \frac{1}{c_0^2} p + \dots\end{aligned}$$

显然，在仅保留一阶小量 $O(\epsilon)$ 的近似下，方程 (9a) 或 (9b) 中的 ρ 、 β 、 κ 和 c 皆可用下标“0”表示的静态值取代

$$\rho_0 = \rho(0), \beta_0 = \beta(0), \kappa_0 = \kappa(0), c_0 = c(0)$$

于是，方程 (9b) 线性化为：

$$\begin{cases} \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla p = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \\ \beta_0 \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v} = q(\mathbf{x}, t) \end{cases} \quad (12)$$

这是一对支配线性声波运动的基本方程。

对前一式求散度 div ，对后一式求时间偏导数在乘以 ρ_0 ，在两式相减即消去其中的速度 \mathbf{v} ，得到有源线性声压波方程：

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \nabla \cdot \mathbf{f} - \rho_0 \frac{\partial q}{\partial t} \quad (13)$$

其中，拉普拉斯算符

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

而常量

$$c_0^2 = c^2 \Big|_{p=P_0} = \frac{1}{\rho_0 \beta_0} = \frac{\kappa_0}{\rho_0}$$

方程 (13) 的右端是声场之源（声源）。可见，外力之作用和质量流之产生，均为声波之源。也可看出，诸如重力等恒力，散度为零，不产生声波；而定常流源 q ，也不产生声波。若既无外力，有无体源，方程 (13) 为标准的声波方程。

当然，也可以在 (12) 的两个方程中消去声压 p ，从而得到速度 \mathbf{v} 所满足的波动方程

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \beta_0 \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} - \nabla q$$

但这是一个矢量波动方程，数学处理不如标量波动方程（13）容易。

• 速度势

若无外力 $\mathbf{f} = 0$ ，则对方程（12）的第一式作实际积分，

$$\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla \int p dt \quad (14a)$$

可见， $\mathbf{v} = -\text{grad}(\Phi)$ ，其中函数

$$\Phi = \frac{1}{\rho_0} \int p dt \quad (14b)$$

称为**速度势**。所以，速度是有势的（或无旋的： $\text{rot}(\mathbf{v})=0$ ）【注1】。速度势是声压的时间积分。反之，声压可表为速度势的时间微分：

$$p = \rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (15)$$

将其代入 $\mathbf{f}=0$ 的有源波动方程（13），并对时间积分一次，得到速度势 Φ 所满足的有源波动方程

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -q(\mathbf{x}, t) \quad (16)$$

声压和速度势皆为标量，皆可用来描述声场。一旦从波动方程（16）求得速度势的解，就可以获得声压和速度场。

• 无源声波方程及声学量之间的基本关系

假设声场（或部分区域）无源分布， $\mathbf{f}=0$ ， $q=0$ ，则方程（12）简为如下一对基本方程：

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p, \quad \frac{\partial p}{\partial t} = -\kappa_0 \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (\kappa_0 = \rho_0 c_0^2) \quad (17)$$

式中 $\kappa_0=1/\beta_0$ ，是流体媒质的体弹性系数。由此可立即导出齐次的声压波动方程：

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (18)$$

而由（16）知，速度势 Φ 在 $q=0$ 时也满足形式完全相同的波动方程。

此外，方程（2）和（3）的线性化形式为

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho'}{\partial t}$$

对其作时间积分，得出

$$\Delta = -\frac{\rho'}{\rho_0} = \nabla \cdot \boldsymbol{\xi}, \quad (\boldsymbol{\xi} = \int \mathbf{v} dt)$$

其中 $\boldsymbol{\xi}$ 是质点的位移矢量。又，状态方程（5）的线性化形式是

$$p = c_0^2 \rho' = \kappa_0 \frac{\rho'}{\rho_0}$$

综上，声学量存在如下简单的关系

$$\frac{p}{\kappa_0} = \frac{\rho'}{\rho_0} = -\Delta = -\nabla \cdot \boldsymbol{\xi} \quad (19)$$

既然如此， ρ' 、 Δ 、 $\text{div}(\boldsymbol{\xi})$ 也服从形式与（18）一样的波动方程。

• 平面行波解

线性声波方程（18）具有平面行波解，声压 p 和质点速度 \mathbf{v} 皆可表为单变元 ζ 的函数：

$$p = p(\zeta), \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(\zeta), \quad (\zeta \equiv \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - c_0 t)$$

式中 \mathbf{n} 是传播方向的单位矢量， \mathbf{x} 是空间矢量。利用微分关系

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial \zeta}{\partial t} \frac{d}{d\zeta} = -c_0 \frac{d}{d\zeta} \\ \nabla &= (\nabla \zeta) \frac{d}{d\zeta} = \mathbf{n} \frac{d}{d\zeta} \end{aligned}$$

立即可以验证此行波声压解满足波动方程（18）。另一方面，把这些微分关系代入方程（17）的第一式，

$$-\rho_0 c_0 \frac{d\mathbf{v}}{d\zeta} = -\mathbf{n} \frac{dp}{d\zeta}$$

对宗量 ζ 积分一次，得到速度 \mathbf{v} 和声压 p 的简单关系：

$$\mathbf{v} = \frac{p}{\rho_0 c_0} \mathbf{n}, \quad \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{c_0} = \frac{p}{\kappa_0} \quad (20)$$

此乃除（19）之外平面行波声学量额外所具有的关系。

【注 1】事实上，速度势是无旋的结论，不仅适用于均匀媒质，也适用于非均匀媒质。一般而言，流体运动的欧拉方程可以写成

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P(\rho)$$

由于绝热过程中压强仅为单变量（例如，密度 ρ ）的函数，故上式右端可表成

$$\frac{1}{\rho} \nabla P(\rho) = \nabla \left(\int \frac{dP}{\rho} \right)$$

于是，在线性近似下（忽略对流项：速度 \mathbf{v} 的迁移导数），欧拉方程简化为

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \approx -\nabla \left(\int \frac{dP}{\rho} \right)$$

对方程两边作旋度操作，得到

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{v} \approx 0 \quad \rightarrow \quad \nabla \times \mathbf{v} \approx 0$$

所以，即使流体密度非均匀，速度势 Φ 也存在。与声压 p 一样，速度势 Φ 也是标量，可以方便地描述声场。究竟取声压还是速度势作为声场的描述量，殆取决于处理问题之方便性。

引自：<http://xlwangnu.blog.163.com/blog/static/1907192702011916252519/>

流体的弹性

Elasticity of Fluids

南京大學聲學研究所 王新龍

声波是媒质质点振动形式的传递，而媒质的振动因其固有的体弹性，类于单振子集总参数系统的振动。弹簧的反抗压缩与伸长，产生弹性恢复力。同理，流体的体弹性反抗流体的压缩与膨胀，产生使流体质点恢复平衡态的力。故而，理解流体的体弹性与压缩膨胀的关系是理解声波物理过程的核心。本文概述流体的体弹性，以作为对《理想流体声波方程》一文之先导。

流体看似流而无形，其实与固体一般具有固有的弹性，以抵抗外部施加的压力。弹性强的流体，抗压能力强，故压缩性差；反之亦然。故对于流体而言，弹性与压缩性实际上是一种物性的相反表述。设体积 V 的流体处于压强 P 的热力学平衡态状态。在保持其它状态变量（如熵或温度）不变的前提下，压强从 P 增加到 $P+dP$ 时，流体的体积相应地从 V 增加到 $V+dV$ 。流体的压缩性可用如下定义的压缩系数 β 衡量：

$$\beta = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P} \quad (1a)$$

即单位体积的流体在单位压强增量的作用下而引起的体积改变量。压强增加，流体压缩，体积减小，故定义式取负，使压缩系数 β 恒正。此处采用对状态变量的偏导数，意谓保持其它独立状态变量（如果存在）固定。在保持熵不变的情形下，上式定义的 β 是绝热压缩系数；在保持温度不变的情形下，则是等温压缩系数。体弹性系数（模量） κ 定义为压缩系数 β 之倒数：

$$\kappa = \frac{1}{\beta} = -V \frac{\partial P}{\partial V} \quad (1b)$$

显然，所定义的 β 或 κ 是状态变量的函数。例如，气体的压强越大越难于压缩，所以压缩系数是压强的函数。

容变与速度散度

定义式 (1) 中的 dV/V 表示因压缩膨胀流体体积的相对变化大小，类于弹簧的相对压缩伸长量（伸长量与弹簧长度之比）。容变 Δ 衡量此变化，定义为体积的相对增量【注 1】

$$d\Delta = \frac{dV}{V}, \quad \Delta = \int d\Delta \quad (2)$$

用容变 Δ 表示，公式 (1) 可写成

$$\beta = -\frac{\partial \Delta}{\partial P}, \quad \kappa = -\frac{\partial P}{\partial \Delta}$$

所以，压缩系数是单位压强增量作用引起的容变增量，而体弹性系数则反之。公式 (2) 中的 V 既可以是部分流体的体积，也可以是全部流体的体积。设包围体积 V 的封闭曲面是 S 。进一步假设 $d\Delta$ 的容变是在 dt 时间内完成的。在此短时间内，流体体积的增量 dV 是由边界 S 上流体的微小位移 $\mathbf{v}dt$ 造成的：从面元 dS 流出的体积是 dS 与此位移在 dS 的法向 \mathbf{n} （单位矢量）的投影之积，即 $(\mathbf{v}dt) \cdot \mathbf{n}dS = dt(\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S})$ ，其中 $d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS$ 是有向面元。此即经 dS 面元的流体膨胀量。经整个封闭表面 S 膨胀的体积为

$$dV = \oiint_S (\mathbf{v}dt) \cdot d\mathbf{S} = dt \cdot \oiint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$$

代入定义式 (2)，并利用高斯定理，得到

$$d\Delta = dt \times \frac{1}{V} \oiint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = dt \times \frac{1}{V} \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{v} dx dy dz$$

两边除以时间间隔 dt ，得到容变率——容变的时间变化率：

$$\frac{d\Delta}{dt} = \frac{1}{V} \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{v} dx dy dz$$

可见，容变率是速度散度之体积平均。如前所述，此处的体积 V 可大可小【注 2】。如果 V 大至整个流体的体积，则 Δ 反映整个流体的（平均）体积变化。另一方面，若 $V \rightarrow 0$ ，则 Δ 描述流体局部或质点体积的相对变化。在 $V \rightarrow 0$ 的极限意义下，上式变为

$$\frac{d\Delta}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (3)$$

即容变率等于速度 \mathbf{v} 的散度。在此（也是本文所关心的）意义下， Δ 是空间函数，描述了压缩膨胀的空间分布。

在声作用下，容变 Δ 也是声扰动量。在小振幅线性假设下，声扰动量皆为小量，故时间全导数悉可用偏导数近似，例如

$$\frac{d\Delta}{dt} \approx \frac{\partial \Delta}{\partial t}, \quad \mathbf{v} = \frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} \approx \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t}, \quad (\boldsymbol{\xi} = \int \mathbf{v} dt)$$

于是，方程 (3) 近似为

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t} \approx \nabla \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} \Delta \approx \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \boldsymbol{\xi}$$

对其积分，得到容变 Δ 与质点位移矢量 $\boldsymbol{\xi}$ 的简单关系【注 1, 2】：

$$\Delta \approx \nabla \cdot \boldsymbol{\xi} \quad (4)$$

所以，容变等于流体位移矢量的散度。在一维的情形下，上式右端就是位移的偏导数，对应于单位长度弹簧的伸长量。

容变与密度变化

对于某固定的流体（拉格朗日描述下的流团）而言，体积的变化必导致流体密度 ρ 的变化。现假定 V 是某质点的体积 ($V \rightarrow 0$)，该质点具有固定的质量 ρV 。在流体运动过程中，质点的质量守恒， $d(\rho V)/dt = 0$ ，遂有方程

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = 0$$

据前所述，第二项恰是质点的容变率 $d\Delta/dt$ 。所以，

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{d\Delta}{dt} = 0 \quad (5)$$

把公式 (3) 给出的容变率代入，得到拉格朗日描述下的连续性方程：

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

在声扰动下，密度 $\rho = \rho_0 + \rho'$ ，其中 ρ_0 是无声扰动时的密度（设 ρ_0 为均匀的常数）， ρ' 为密度扰动量。在小振幅线性近似下，方程 (5) 中扰动量的时间全导数可用偏导数近似，密度可用静态值 ρ_0 近似。于是，方程 (5) 近似为：

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t} \approx -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho'}{\partial t}$$

对其积分得到容变与密度变化的关系

$$\Delta \approx -\frac{\rho'}{\rho_0} \quad (6)$$

所以，在线性近似下，容变与密度相对变化，量值相等，符号相反。

体弹性关系

对于弹簧，胡克（Hooke）定律通过弹性常数 K 建立了弹性恢复力 F 与弹簧伸长量 ξ 之间的线性关系。类似的关系亦存在于连续介质之中。考虑密度 ρ 、压强 P 的理想流体（无声扰动时的静密度为 ρ_0 ，静压为 P_0 ）。根据压缩系数 β 的定义 (1a)，得到

$$d\Delta = \frac{dV}{V} = -\beta dP$$

反之，根据体弹性系数 κ 的定义 (1b)，有体弹性关系，

$$dP = -\kappa d\Delta \quad (7)$$

对上式积分，并考虑到声压 p 的定义和容变 Δ 的定义 (2)，得到

$$p = -\int \kappa d\Delta = -\kappa_0 \Delta - \int (\kappa - \kappa_0) d\Delta$$

式中 κ_0 近乎无声扰动时的体弹性常数 κ 的值（用下标“0”表示）。在小振幅（线性）近似下，方程右端的第二项乃高阶小量，可以忽略。于是，得到线性体弹性关系：

$$p \approx -\kappa_0 \Delta \quad (8)$$

或者，利用近似关系 (4)，得到声压与质点应变之间的线性弹性关系

$$p \approx -\kappa_0 \nabla \cdot \xi \quad (9)$$

公式 (8) 或 (9) 建立了流体的声压与容变的关系，极类似于弹簧的恢复力 F 与质点位移 ξ 的关系： $F = -K\xi$ ，其中 K 是弹簧的弹性系数【注 3】。

声速与体弹性系数

流体的状态可以选用一个或多个状态变量作为独立变量。若采用密度 ρ 为独立状态变量之一，则压力 P 等任何状态变量可表为密度 ρ （以及其它独立变量如熵）的函数： $P = P(\rho)$ 。声速 c 是导出性的状态参量，反映密度 ρ 的变化（但保持其它独立变量如熵为常数）所引起的压强变化的大小，

$$c^2 \equiv \frac{\partial P}{\partial \rho} = \frac{\partial P}{\partial \Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial \rho}$$

根据公式 (5) 和 (7)，

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho}, \quad \frac{\partial P}{\partial \Delta} = -\kappa$$

因此，得到 c 的表达式

$$c = \sqrt{\frac{\kappa}{\rho}}$$

此处， c 采用正值。以下标“0”表示无声扰动时平衡态的声速值：

$$c_0 = \sqrt{\frac{\kappa_0}{\rho_0}} = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \beta_0}}, \quad \left(\kappa_0 = \frac{1}{\beta_0} \right)$$

理想气体服从状态方程

$$PV^\gamma = P_0 V_0^\gamma$$

其中 P_0 和 V_0 是平衡态的压强和体积， γ 是气体绝热常数。据此求得体弹性系数

$$\kappa = -V \frac{\partial P}{\partial V} = -\frac{\partial P}{\partial \Delta} = \gamma P$$

因此，

$$c = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}, \quad c_0 = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}}$$

其中下标“0”表示平衡态的值。

压缩系数与声容

对尺寸远小于波长的流体体积 V （如亥姆霍兹共鸣器的腔体）而言，其内的压强 P 近乎均匀。定义新的声学参数

$$C_a = -\left. \frac{\partial V}{\partial P} \right|_{\rho=\rho_0} = \beta_0 V_0, \quad (\beta_0 \equiv \beta|_{\rho=\rho_0}) \quad (10)$$

当压强从静态的 P_0 增加到 P_0+p ，体积 $V_0 \rightarrow V_0 + \Delta V$ ：

$$\begin{aligned} \Delta V &= \left. \frac{\partial V}{\partial P} \right|_{P=P_0} (P - P_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial P^2} \right|_{P=P_0} (P - P_0)^2 + \dots \\ &= -C_a p + O(p^2) \end{aligned}$$

所以在线性近似下 C_a 建立了声压 p 与体积变化的关系：

$$p = -\frac{1}{C_a} \Delta V$$

此公式类比于弹簧的胡克定律，其实与公式（9）一致。公式（10）表明，压缩系数是单位体积的声容。所以，声容类比于力顺，因此谓之声顺（声容）。

对于理想气体，根据状态方程可以求得

$$C_a = \frac{V_0}{\gamma P_0} = \frac{V_0}{\rho_0 c_0^2}, \quad \left(c_0^2 = \frac{\gamma P_0}{\rho_0} \right)$$

对于 Helmholtz 共鸣器，体积的增量 ΔV 等于从管口流出的流量【注 2，3】。设 U 是流向腔体的体积速度，则

$$\Delta V = -\int U dt$$

而对于球形气泡而言，体积的增量 ΔV 为

$$\Delta V = \int U(t)dt, \quad \left(U(t) = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} \right)$$

式中 r 是气泡的瞬时半径。

【注 1】把长度 l 的弹簧视为一维的弹性体，其相对伸长量为

$$d\Delta = \frac{dl}{l}, \quad \Delta = \int_0^{\Delta} d\Delta = \int_l^{l+\xi} \frac{dl}{l} \xrightarrow{|\xi| \ll l} \frac{\xi}{l}$$

【注 2】例如，对于体积为 V_0 的亥姆霍兹腔体，因腔体壁面固定，体积流仅存在于喉管口，所以

$$dV = dt \oint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = -Udt \quad \rightarrow \quad \frac{dV}{dt} = -U$$

式中， U 是喉管的流量，方向指向腔体内。所以，

$$\frac{d\Delta}{dt} = -\frac{U}{V} \approx -\frac{U}{V_0} \quad \rightarrow \quad \Delta = -\frac{1}{V_0} \int Udt$$

【注 3】对于亥姆霍兹共鸣器，容变由【注 2】给出。所以，根据公式 (8)，腔体内的声压 p 与喉管流量 U 的关系

$$p = -\kappa_0 \Delta = \frac{1}{C_a} \int Udt, \quad \left(C_a = \frac{V_0}{\kappa_0} = \frac{V_0}{\rho_0 c_0^2} \right)$$

与集总参数理论的结果一致。

引自: <http://xlwangnu.blog.163.com/blog/static/19071927020133170412538/>

流体运动的拉格朗日描述

Lagrange Description of fluid motion

南京大學聲學研究所 王新龍

【摘要】在线性声学范畴，拉格朗日描述与欧拉描述几无分别，但对非线性声学则不然。人们或惯用欧拉描述来分析求解声学问题，但对有些非线性问题若采用拉格朗日描述或许更加直接了当，更易求得解析解。本文概论拉格朗日体系及该描述之下流体运动的基本方程，最后给出一维的非线性声波方程。

• 概论

根据问题需要，可以选择拉格朗日或欧拉两种坐标体系之一描述流体的运动。**拉格朗日描述**取初始时刻（如 $t=0$ ）流体质点的三维位置矢量 $\mathbf{R}=(a,b,c)$ 为空间变量，并标识该流体质点。随着流体的运动， t 时刻质点运动至位置 $\mathbf{r}=(x,y,z)$ 。显然， \mathbf{r} 与 \mathbf{R} 具有函数关系： $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{R},t)$ ，或用笛卡尔坐标分量表示

$$\begin{aligned}x &= x(a,b,c,t) \\y &= y(a,b,c,t) \\z &= z(a,b,c,t)\end{aligned}$$

它给出了流体质点在空间的轨迹。在声学问题中，质点的运动其实是在初始位置 $\mathbf{R}=(a, b, c)$ 附近的振动。记振动位移为 $\delta\mathbf{r}=(\xi, \eta, \zeta)$ ，则 $\mathbf{r}=\mathbf{R}+\delta\mathbf{r}$ ，或者，

$$x = a + \xi, y = b + \eta, z = c + \zeta \quad (1b)$$

位移 $\delta\mathbf{r}$ 是初始位置 $\mathbf{R}=(a,b,c)$ 和时间 t 的函数： $\delta\mathbf{r}=\delta\mathbf{r}(\mathbf{R}, t)$ ，或者，用分量表示：

$$\begin{cases} \xi = \xi(a,b,c,t) \\ \eta = \eta(a,b,c,t) \\ \zeta = \zeta(a,b,c,t) \end{cases} \quad (1a)$$

描述流体状态和运动的任何物理量（例如密度 ρ ）是流体质点所“携带”的，并随时间 t 而变化。不同质点的运动状态当然不同，故流体物理量是初始坐标矢量 \mathbf{R} 和时间 t 的函数，例如，密度 $\rho=\rho(\mathbf{R},t)$ 。用初始位置 \mathbf{R} 和时间 t 描述流体

运动的方法即所谓的**拉格朗日描述**，其中 $\mathbf{R}=(a, b, c)$ 是拉格朗日坐标，其实，拉格朗日坐标相当于质点的“**标签**”。拉格朗日描述记录了质点的时间演化，既可以追溯质点的既往，也可以预测质点的未来。

与此不同，**欧拉描述**是现实主义的方法。它仅关注“现在”—— t 时刻处于空间 $\mathbf{r}=(x,y,z)$ 位置的质点。在此种描述下，所有物理量皆表为空间位置坐标 \mathbf{r} （欧拉坐标）和时间 t 的函数，例如密度 $\rho=\rho(\mathbf{r},t)$ 。所以，欧拉描述所刻画的是流场在不同时刻的瞬时分布，其空间坐标 $\mathbf{r}=(x,y,z)$ 是纯数学的。

虽然如此，位于 $\mathbf{r}=(x,y,z)$ 的流体质点毕竟非凭空而降，而是从别处迁移而来。运动规律 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(\mathbf{R},t)$ 或公式 (1) 可对质点“追根溯源”：根据当前的空间位置 \mathbf{r} 反推算初始位置 \mathbf{R} 。所以，欧拉描述和拉格朗日描述可以相互转换。为明确起见，特以上标 (L) 和 (E) 分别标记拉格朗日和欧拉体系的物理量，例如密度 $\rho^{(L)}(\mathbf{R},t)$ 和 $\rho^{(E)}(\mathbf{r},t)$ 。据上论述，

$$\rho^{(L)}(\mathbf{R},t) = \rho^{(E)}(\mathbf{r},t) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}(\mathbf{R},t)=\mathbf{R}+\delta\mathbf{r}(\mathbf{R},t)} = \rho^{(E)}(\mathbf{R} + \delta\mathbf{r}(\mathbf{R},t),t)$$

特别是，若位移 $\delta\mathbf{r}$ 很小，可以对上式右端作泰勒展开

$$\begin{aligned} \rho^{(L)}(\mathbf{R},t) &= \rho^{(E)}(\mathbf{R} + \delta\mathbf{r},t) \\ &= \rho^{(E)}(\mathbf{r},t) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{R}} + \nabla\rho^{(E)}(\mathbf{r},t) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{R}} \cdot \delta\mathbf{r} + O(\|\delta\mathbf{r}\|^2) \end{aligned} \quad (2)$$

式中，欧拉空间的梯度算符

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

可见，已知位移 $\delta\mathbf{r}=(\zeta, \eta, \zeta)$ ，可从欧拉体系的物理量求得拉格朗日体系的对应量。反之，若函数 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(\mathbf{R},t)$ 连续可逆，可求得逆函数 $\mathbf{R}=\mathbf{R}(\mathbf{r},t)$ ，从而可把拉格朗日体系的物理量转换为欧拉体系的【注 1】。特别是，对于小位移振动的情形，有如下展开

$$\begin{aligned} \rho^{(E)}(\mathbf{r},t) &= \rho^{(L)}(\mathbf{R},t) \Big|_{\mathbf{R}=\mathbf{r}-\delta\mathbf{r}} = \rho^{(L)}(\mathbf{r} - \delta\mathbf{r},t) \\ &= \rho^{(L)}(\mathbf{R},t) \Big|_{\mathbf{R}=\mathbf{r}} - \nabla_a\rho^{(L)}(\mathbf{R},t) \Big|_{\mathbf{R}=\mathbf{r}} \cdot \delta\mathbf{r} + O(\|\delta\mathbf{r}\|^2) \end{aligned} \quad (3)$$

式中，拉格朗日空间的梯度算符

$$\nabla_a = \left(\frac{\partial}{\partial a}, \frac{\partial}{\partial b}, \frac{\partial}{\partial c} \right)$$

比较展开式 (2) 和 (3) 知，因

$$\rho^{(E)}(\mathbf{r},t) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{R}} = \rho^{(L)}(\mathbf{R},t) \Big|_{\mathbf{R}=\mathbf{r}}$$

拉格朗日描述的物理量 $\rho^{(L)}(\mathbf{R}, t)$ 与欧拉描述的 $\rho^{(E)}(\mathbf{r}, t)$ 仅相差量级 $O(\|\delta\mathbf{r}\|)$ 。

数学上，函数关系 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(\mathbf{R}, t)$ 或公式 (1) 所表达的是以时间 t 为参变量的空间映射：

$$\mathbf{R} = (a, b, c) \longrightarrow \mathbf{r} = (x, y, z) \quad (4)$$

矢量 \mathbf{r} 在拉格朗日空间的梯度

$$\mathbf{J} \equiv \nabla_{\mathbf{a}} \mathbf{r} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial a}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial b}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial c} \right) \quad (5)$$

是一个矢量的矢量——张量，某种程度上刻画了映射的性质。 \mathbf{J} 也可用等价的雅可比矩阵形式表示：

$$\mathbf{J} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(a, b, c)} = \begin{pmatrix} x_a & x_b & x_c \\ y_a & y_b & y_c \\ z_a & z_b & z_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \xi_a & \xi_b & \xi_c \\ \eta_a & 1 + \eta_b & \eta_c \\ \zeta_a & \zeta_b & 1 + \zeta_c \end{pmatrix} \quad (6)$$

式中的下标表示对相应变量 (a, b, c) 的导数，例如，

$$\xi_a = \frac{\partial \xi}{\partial a}$$

• 连续性方程

设某质点的初始体积 $\Delta V_0 (\rightarrow 0)$ ， t 时刻的体积 ΔV 。根据数学分析，雅可比矩阵 \mathbf{J} 的行列式（记为 $|\mathbf{J}|$ ）是在映射 (4) 下质点体积元的缩放因子：

$$\Delta V = |\mathbf{J}| \Delta V_0$$

设流体初始的质量密度为 ρ_0 ， t 时刻的质量密度为 ρ 。根据质量守恒定律， $\rho_0 \Delta V_0 = \rho \Delta V$ 。将上式代入，得到拉格朗日坐标下的连续性方程

$$\rho_0 = |\mathbf{J}| \rho \quad (7)$$

对于一维的情形，根据定义 (6) 知 $|\mathbf{J}| = 1 + \xi_a$ ，公式 (7) 遂简为

$$\rho_0 = (1 + \xi_a) \rho \quad (7a)$$

• 运动方程

理想流体的运动遵循[欧拉方程](#)

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla P$$

式中， P 是流体压强， \mathbf{v} 是流体质点的速度：

$$\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{r}(\mathbf{R}, t) = \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}, \frac{\partial \eta}{\partial t}, \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right)$$

在拉格朗日体系中，速度 \mathbf{v} 也是拉格朗日坐标 $\mathbf{R} = (a, b, c)$ 和时间 t 的函数： $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{R}, t)$ 。加速度 $d\mathbf{v}/dt$ 是 \mathbf{v} 的时间导数。如此，欧拉方程可写为

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}(\mathbf{R}, t) = -\nabla P$$

在此方程的等式两端同时点乘矢量

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial a} = \left(\frac{\partial x}{\partial a}, \frac{\partial y}{\partial a}, \frac{\partial z}{\partial a} \right) = \left(\mathbf{1} + \frac{\partial \xi}{\partial a}, \frac{\partial \eta}{\partial a}, \frac{\partial \zeta}{\partial a} \right)$$

并利用微分关系

$$\nabla P \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial a} = \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial a} = \frac{\partial P}{\partial a}$$

得到

$$\rho \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial a} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} = -\frac{\partial P}{\partial a}$$

同理，可得

$$\rho \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial b} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} = -\frac{\partial P}{\partial b}$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial c} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} = -\frac{\partial P}{\partial c}$$

以上三个方程合而为一，可表为

$$\rho \mathbf{J} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} = -\nabla_a P \quad (8)$$

此即拉格朗日体系的流体运动方程。若把 $\mathbf{r} = \mathbf{R} + \delta \mathbf{r}$ 代入上式，则可用质点的位移 $\delta \mathbf{r} = (\zeta, \eta, \zeta)$ 表示运动方程

$$\rho \left[\nabla_a \mathbf{R} + \nabla_a (\delta \mathbf{r}) \right] \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta \mathbf{r} = -\nabla_a P$$

而方括号中的第一项等于单位张量 \mathbf{I} （此处非指声强），其与任意矢量之点积为该矢量本身。结果得到

$$\rho \mathbf{J} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta \mathbf{r} = -\nabla_a P, \quad [\mathbf{J} = \mathbf{I} + \nabla_a (\delta \mathbf{r})] \quad (9a)$$

如以矩阵表示，并利用连续性方程（7），则拉格朗日方程可表为矩阵形式

$$\rho \mathbf{J} \cdot \begin{pmatrix} \xi_{tt} \\ \eta_{tt} \\ \zeta_{tt} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} P_a \\ P_b \\ P_c \end{pmatrix}, \quad \left(\xi_{tt} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \dots, P_a = \frac{\partial P}{\partial a}, \dots \right) \quad (9b)$$

式中，雅可比矩阵 \mathbf{J} 由公式 (6) 给出。在一维情形， $\mathbf{J} = 1 + \zeta_a$ ，方程 (8) 于是简化为

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = - \frac{\partial P}{\partial a} \quad (10)$$

其中已经利用了连续性方程 (7a)。可见，拉格朗日描述下质点的一维运动方程是线性的。当然，质点运动仍是非线性的，集中体现在连续性方程 (7) 以及 (下述的) 状态方程中。

- 一维理想流体的非线性声波方程

理想流体 (如气体) 满足绝热状态方程: $P=P(\rho)$ 。利用连续性方程 (7a)，则

$$P = P \left(\frac{\rho_0}{1 + \xi_a} \right)$$

代入一维运动方程 (10) 的右端，得到非线性声波方程

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{1}{(1 + \xi_a)^2} P' \left(\frac{\rho_0}{1 + \xi_a} \right) \frac{\partial^2 \xi}{\partial a^2} \quad (11)$$

其中 $P'(\rho) = dP/d\rho$ 。如果 $|\zeta_a| \ll 1$ ，则可对方程 (11) 作线性化处理，从而得到熟知的线性波动方程。若 $|\zeta_a| < 1$ ，则有泰勒展开：

$$\frac{1}{(1 + \xi_a)^2} P' \left(\frac{\rho_0}{1 + \xi_a} \right) = c_0^2 (1 - 2\beta \xi_a + \dots)$$

$$\left[c_0^2 \equiv P'(\rho_0), \beta \equiv 1 + \frac{\rho_0 P''(\rho_0)}{P'(\rho_0)} \right]$$

式中， c_0 是熟知的线性声速，而 β 是非线性系数，衡量媒质本身 (二次) 非线性的大小。若仅计及二阶非线性小量，则方程 (11) 可近似为

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial a^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \approx \beta \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\partial \xi}{\partial a} \right)^2 \quad (12)$$

方程的左端是标准的一维波动方程，而右端的非齐次项是二次非线性的贡献。

【注 1】在诸如湍流等复杂流动情形，可逆性或许不存在，两种描述难于转换。

引自：<http://xlwangnu.blog.163.com/blog/static/190719270201162074723866/>

水波与声波之异同

Water waves and sound waves: similarities and differences

南京大學聲學所 王新龍

水表面波（简称水波）与声波和光波一样，是自然界普遍存在的波动形式。微风吹拂一池春水，泛起阵阵涟漪；投石平静湖面，激起一串同心圆状波纹；海浪汹涌澎湃，昼夜不息；地震引发的海啸奔腾而来，其力量之大，几可毁灭沿岸一切。凡此种种，皆水波之表现。由于水波直观可视，故最早为人所知。水波与声波同为机械波，皆因媒质（水）的扰动而起。但是，普通水波的内在机制是水表面对重力场的不稳定性（在小尺度范围，表面张力的弹性也可激起表面波——涟漪），而流体（如水）中的声波则完全是流体的压缩膨胀使然。此乃水波与声波之根本差别。

水波与声波共同遵从（欧拉）运动方程，

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \mathbf{g}$$

其中 P 是压强， \mathbf{v} 是质点速度矢量， ρ 是水密度， \mathbf{g} 是重力加速度矢量。恰如线性声波，对于小振幅水波，同样可略去方程的对流项： $\mathbf{v} \cdot \text{grad}(\mathbf{v})$ 。所以，小振幅水波与线性声波一样无旋： $\text{Rot}(\mathbf{v}) = 0$ ，也即存在速度势 Φ ， $\mathbf{v} = \text{grad}(\Phi)$ 。与声波所不同的是，水波理论假定水是不可压缩的，即 ρ 是常数。根据连续方程，此意味着零速度散度： $\text{div}(\mathbf{v}) = 0$ 。所以，水波速度势 Φ 满足拉普拉斯方程：

$$\nabla^2 \Phi = 0$$

拉普拉斯方程排除了水体内存在小振幅线性波动（体波）之可能【注释1】，此与声波全然不同。虽然如此，在界面（表面）上仍有可能某种形式的波动（声波也存在表面波形式）。设 ζ 为水面的垂直位移。在水-大气的边界面上，必须满足动力学和运动学边界条件，其线性化形式为：

$$g\zeta + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = P_0, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

其中 g 是重力常数， P_0 是大气压。上列方程中，前者根据水-气界面上水压 P 等於大气压 P_0 再应用伯努利方程而得到，后者根据界面上法向速度连续得到。由于 P_0 可以被吸收到速度势中，如 $\Phi \rightarrow \Phi + P_0 t$ ，而速度势不在乎增加一个时间有关的项，故可以直接把第一个方程中的 P_0 置零。此处值得注意的是，上列边界条件中忽略了水表面张力的影响【注释2】。两边界方程中消去 ζ ，得到仅含速度势 Φ 的边界条件：

$$g \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0$$

此处，假定坐标的 (x,y) 平面在水平面上， z 轴垂直向上。显然，若无重力场 ($g=0$)， Φ 在边界上只是 (x,y) 的空间函数，也就不可能存在波动形式的解。满足拉普拉斯方程的速度势有如下形式的解：

$$\Phi(x, y, z, t) = \phi(x, y, t) \frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd}$$

其中 k 为 z 方向的波数， d 是水深。 ϕ 是水面上速度势。把形式解代入拉普拉斯方程和边界方程，得到：

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + k^2 \phi &= 0 \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \omega^2 \phi &= 0 \end{aligned}$$

两个方程分别描述速度势的空间和时间变化，前者是二维 Helmholtz 方程，后者是谐波自由振动方程，其中 ω 由如下频散方程给出，

$$\omega^2 = gk \tanh kd$$

由此可见，只是由于水表面的存在，流体的运动才具有波动的形式。二维 Helmholtz 方程与薄膜的振动方程无异，存在二维波动解；例如，在园对称情形下的贝塞尔函数解，

$$\phi = -\frac{g}{j\omega} A J_0(kr) e^{j\omega t}, \quad \zeta = -\frac{j\omega}{g} \phi = A J_0(kr) e^{j\omega t}$$

描述了投石湖面激起的同心圆波纹，其中 r 为湖面上任意观察点离落石点的距离， A 为水波幅度。在一维情形下，上列方程具有形如 $\exp(-jkx)$ 的解。再代入形式解，最后得到一维行波解：

$$\Phi = -A \frac{g}{j\omega} \frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd} e^{j(\omega t + kx)}, \quad (z \leq 0)$$

此解描述了狭长水槽中水面行波。当 d 趋向于无穷（深水）时，表面波解可近似为

$$\Phi = -A \frac{g}{j\omega} e^{kz + j(\omega t + kx)}, \quad (z \leq 0)$$

由此得到表面位移和水下任一深度处质点的速度：

$$\zeta = A e^{kz + j(\omega t + kx)}, \quad \omega \mathbf{v} = gk \zeta \times (1, j) e^{kz} \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0$$

因仅存在于水表面层，水波为表面波；逾往深处，波动逾弱（指数衰减）。故而，海浪虽然跌宕起伏，汹涌澎湃，但深水却是宁静的世界。还可以看出，速度的分量相差 90 度的相位，表明质点作围绕其平衡位置作圆周运动。

因此，水面波之产生，全因重力场之故。重力造成水面的不稳定，某处水位之抬高，必造成临近水位之降低，遂成波动。与之不同，声波之成，在于媒质的可压缩性。事实上，空气中声波存在与否，与重力无关。只有极低频率的次声波，重力场的影响才对声的传播有所影响。当然，与水表面波类似，声也可以存在表面波，如固体表面的声表面波，称为瑞利波。

水波与声波之不同，还表现在水波是高度频散的——声速是频率的函数，而一般流体（如水）中声波的频散极其微弱，声速几为与频率无关的常数。根据上列水波频散方程，得到水波的波速 c （相速度）与频率 ω （波长 λ ）的关系：

$$\left(\frac{c}{c_0}\right)^2 = \frac{\tanh\left(2\pi\frac{d}{\lambda}\right)}{2\pi\frac{d}{\lambda}}, \quad (c_0 = \sqrt{gd})$$

其中 c_0 是浅水的波速。下图绘出了水波波速与相对水深的波长之间的关系

可见，短波波速几近于零，长波传播最快，波速近似等于 c_0 。因此频散特性，水波波包极易弥散。而一般流体（如空气，水）中，声波即使传播到很远处，也能保持波形的完整。

【注释 1】若水的密度不均匀，如海洋海水密度沿深度方向变化，则可能存在称为内波的体波。

【注释 2】若水表面的蠕动如此之大，以致表面曲率很大，则表面张力之影响不可忽略，甚至超过重力；若然，当须计入表面张力。表面张力其支配作用的水表面波，一般称为蠕波，如水中涟漪等。

引自: <http://xlwangnu.blog.163.com/blog/static/1907192702011920114134220/>

法向声阻抗率与界面反射

Normal Specific Acoustic impedance and Sound Reflection

南京大学声学研究所 王新龙

声现象丰富多彩，不胜枚举。最常见者，莫过于声在媒质界面上的反射。声之反射，盖因界面两侧媒质声阻抗失配。本文宗旨，首在阐明法向声阻抗率的概念，继而建立法向声阻抗率与声反射、透射系数的普适关系。由此关系，已知法向声阻抗率，即可获知反射与透射系数系数；反之亦然。法向声阻抗率刻画媒质或界面的声学性质，因而决定声的反射与透射行为。

一、法向声阻抗率的定义

设 $x < 0$ 的媒质的声特性阻抗率为 $z_0 = \rho_0 c_0$ ，其中有频率为 ω 、波数为 $k = \omega/c_0$ 的平面声波以角度 $\theta_i = \theta$ 入射到位于 $x=0$ 的媒质边界上，如下图一所示。记入射声压为 p_i ，反射声压为 p_r 。根据反射律，反射角 $\theta_r = \theta_i$ 。定义界面的法向声阻抗率为界面上的声压 p 与法向速度 v_n 之比：

$$z_n = \left. \frac{p}{v_n} \right|_{x=0}, (v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \quad (4-6-1)$$

式中 \mathbf{n} 是法向单位矢量， \mathbf{v} 是与声压 p 对应的流体速度矢量。其实，定义式(4-6-1)并不一定限于边界处，亦适用于媒质中任意空间。按此理解，则所谓的法向 \mathbf{n} ，实乃指定的某个特殊方向，故法向声阻抗率实际上是方向声阻抗率 (directional specific acoustic impedance)。

根据运动方程，

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial t} = j\omega} \mathbf{v} = -\frac{1}{j\omega\rho_0} \nabla p = -\frac{1}{jkz_0} \nabla p$$

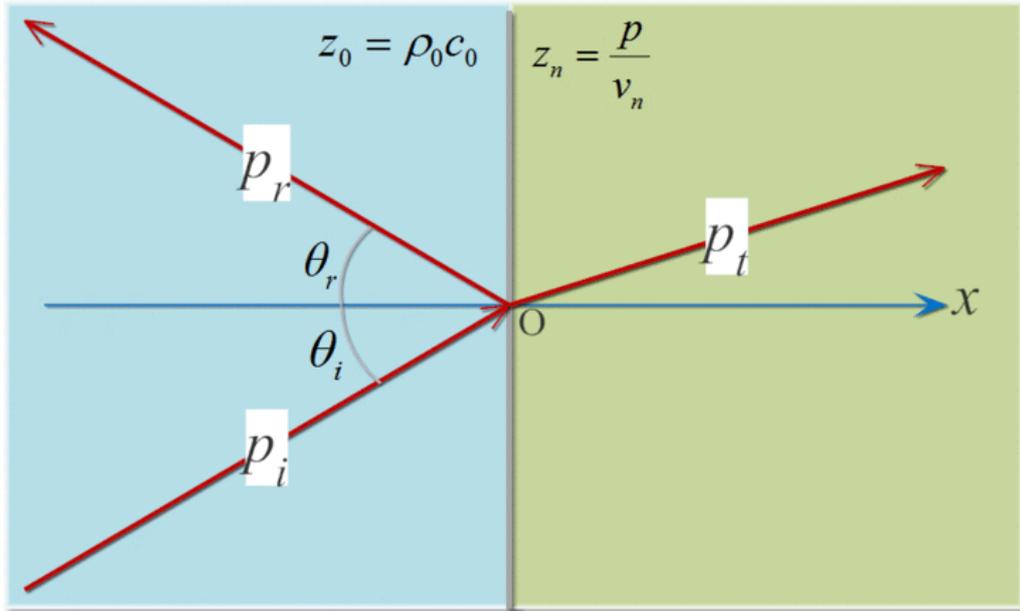
所以，法向速度 v_n 可以用声压 p 的法向导数 $\partial p / \partial n$ 表示：

$$v_n = -\frac{1}{jkz_0} \frac{\partial p}{\partial n}, \left(\frac{\partial p}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot \nabla p \right)$$

代入定义式(4-6-1)，则法向声阻抗率可表为：

$$z_n = -jkz_0 \left(p / \frac{\partial p}{\partial n} \right)_{x=0} \quad (4-6-2)$$

本文默认图一中 $x=0$ 界面的法向指向正 x 方向（当然，视实际需要， \mathbf{n} 也可指负 x 方向）。所以，法向导数正好是在 x 方向上的导数，即 $\partial p / \partial n = \partial p / \partial x$ 。一般而言，法向声阻抗率 z_n 是声波频率 ω 的函数， $z_n = z_n(\omega)$ ；例如，隔声层反射界面的法向声阻抗率 z_n 就与声波频率 ω 有关。



图一、声波反射示意图。媒质的界面位于 $x=0$ ，入射波 p_i 自 $x < 0$ 斜入射于界面上反射而形成反射波 p_r 。

二、界面法向声阻抗率与声压反射系数关系

由于在界面的反射，入射侧的总声场（声压 p ，流体速度 \mathbf{v} ）是入射声场与反射声场之叠加。若已知平面声波的声压反射系数 r_p ，则入射声场（声压 p_i ，质点速度 \mathbf{v}_i ）和反射声场（声压 p_r ，质点速度 \mathbf{v}_r ）可分别表为，

$$\begin{aligned}
 p_i &= p_{i0} \mathbf{e}^{j(\omega t - k\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{x})}, \quad \mathbf{v}_i = \frac{p_i}{z_0} \mathbf{n}_i \\
 p_r &= p_{i0} r_p \mathbf{e}^{j(\omega t - k\mathbf{n}_r \cdot \mathbf{x})}, \quad \mathbf{v}_r = \frac{p_r}{z_0} \mathbf{n}_r
 \end{aligned} \tag{4-6-3}$$

$$\left(k = \frac{\omega}{c_0} \right)$$

其中 \mathbf{n}_i 和 \mathbf{n}_r 分别为入射和反射方向矢量。关于平面波的速度与声压的关系，参见《理想流体声学量的基本关系》第(12)式。根据反射律，反射角 θ_r 等于入射角 θ_i 。又因法向 \mathbf{n} 沿 x 方向，故 $\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{n}_r \cdot \mathbf{n} = \cos\theta_i$ 。入射侧 ($x < 0$) 的总声压 p 和法向速度 v_n 分别为

$$\begin{aligned} p &= p_i + p_r \\ v_n &= \left(\frac{p_i}{z_0} \mathbf{n}_i + \frac{p_r}{z_0} \mathbf{n}_r \right) \cdot \mathbf{n} = \frac{p_i - p_r}{z_{0n}} \end{aligned} \quad (4-6-4)$$

其中

$$z_{0n} = \frac{z_0}{\cos\theta_i}$$

是入射行波的法向声阻抗率（见下文）。把公式(4-6-3)代入(4-6-4)，公式(4-6-4)代入法向声阻抗率的定义式(4-6-1)，得到法向声阻抗率与声压反射系数的关系

$$z_n = z_{0n} \frac{1 + r_p}{1 - r_p} \quad (4-6-5)$$

所以，已知声压反射系数 r_p ，可求出界面的法向声阻抗率 z_n 。反之，若已知界面的法向声阻抗率 z_n ，根据公式(5)可以得到界面声压反射系数 r_p ：

$$r_p = \frac{z_n - z_{0n}}{z_n + z_{0n}} \quad (4-6-6)$$

由于法向声阻抗率 z_n 一般与频率 ω 有关，反射系数 r_p 也是频率 ω 的函数。如此，有一定频谱结构的入射波，其反射的波形会与入射的不同。从公式(4-6-6)式可知，当 $z_n = z_{0n}$ 时，界面阻抗匹配，反射系数 r_p 为零，入射声波全透射。如果法向声阻抗率 z_n 呈纯阻，反射系数 r_p 是实数，或正（反射声压与入射声压同相），或负（反射声压与入射声压反相）。若界面是刚性的， $z_n \rightarrow \infty$ ，反射系数 $r_p = 1$ ，声波全反射，是为刚性反射；在刚性反射下，反射声压与入射声压同相。若界面是绝对软界面： $z_n \rightarrow 0$ ，反射系数 $r_p = -1$ ，声波也全反射，不过反射声压与入射声压正好反相。如果声阻抗率呈纯抗性： $z_n = jx_n$ ，则

$$r_p = e^{j(\pi - 2\varphi)}, \left(z_n = jx_n, \varphi = \arctan \frac{x_n}{z_{0n}} \right)$$

表明入射波也全反射，但入射与反射波之间存在相位差。抗性界面具有能量储存的功能。

三、法向声阻抗率的连续性和转移公式

法向声阻抗率 z_n 具有两个重要的性质：

(1) 在界面上法向声阻抗率连续：

$$z_n \Big|_{x=0^-} = z_n \Big|_{x=0^+} \quad (4-6-7)$$

此性质是界面两侧声压 p 和流体法向速度 v_n 连续两个边界条件的必然结果。

(2) 在均匀媒质内，平面声波的法向声阻抗率 z_n 是相互关联的，即已知此处的法向声阻抗率 z_n ，可求彼处的 z_n 。由于任意反射问题中的平面波声场均用公式(4-6-2)和(4-6-4)表达，我们可以写出任意位置的法向声阻抗率：

$$z_n(x) = z_{0n} \frac{p_i + p_r}{p_i - p_r} = z_{0n} \frac{e^{-jkx \cos \theta_i} + r_p e^{jkx \cos \theta_i}}{e^{-jkx \cos \theta_i} - r_p e^{jkx \cos \theta_i}}$$

注意，与法向平面内坐标 (y, z) 有关的公因子已经从分子、分母中约去，故而 z_n 仅仅是 x 的函数。假定已知图一中 $x=x_1$ 处的 (总的) 法向声阻抗率 $z_n|_{x=x_1}$ ，就可以从上式求得反射系数 r_p 。如此， $z_n(x)$ 就完全是已知的函数，可以求出任意 x 处的法向声阻抗率。例如，在 $x=x_2$ 处的法向声阻抗率 $z_n|_{x=x_2}$ 为

$$z_n|_{x=x_2} = z_{0n} \frac{z_n|_{x=x_1} + jz_{0n} \tan k_x l}{z_{0n} + jz_n|_{x=x_1} \tan k_x l}, (l \equiv x_1 - x_2) \quad (4-6-8)$$

此即法向阻抗率的转移公式，与[振动系统的力阻抗](#)转移公式如出一辙。公式(4-6-8)当然仅适用于均匀媒质内的平面波声场。

于是，公式(4-6-7)和(4-6-8)建立了平面简谐声波法向声阻抗率的普遍联系。

三、法向声阻抗率各种含义的辨析

必须指出，法向声阻抗率定义式(4-6-1)或(4-6-2)中的声场量（声压与速度），一般指的是总声场。固然，亦可以按公式(4-6-1)或(4-6-2)定义声场的某个成份的法向声阻抗率。例如，在入射侧，总声场是入射波（入射声压 p_i 和速度 \mathbf{v}_i ）和反射波（反射声压 p_r 和速度 \mathbf{v}_r ）之叠加，两者皆为行波，可分别定义各自的法向声阻抗率：

$$z_{i,n} = \left. \frac{p_i}{\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}} \right|_{x=0}, z_{r,n} = \left. \frac{p_r}{\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{n}} \right|_{x=0}$$

根据行波速度与声压的关系（参见《[理想流体声学量的基本关系](#)》（12）式），有

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n} = \frac{p_i}{z_0} \cos \theta_i, \mathbf{v}_r \cdot \mathbf{n} = -\frac{p_r}{z_0} \cos \theta_r, (\theta_r = \theta_i)$$

所以，

$$z_{i,n} = \left. \frac{p_i}{\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}} \right|_{x=0} = \frac{z_0}{\cos \theta_i}, z_{r,n} = \left. \frac{p_r}{\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{n}} \right|_{x=0} = -\frac{z_0}{\cos \theta_r}$$

又根据反射律，

$$\therefore \theta_r = \theta_i$$

$$\therefore z_{i,n} = -z_{r,n} = z_{0n} = \frac{z_0}{\cos \theta_i}$$

显然，这些行波成份的法向声阻抗率不等于总声场的法向阻抗率。更重要的是，它们在边界上是不连续的。

如果透射媒质（设其特性声阻抗率为 z_1 ）半无限（ $x > 0$ ），则其中仅存在行波透射波 p_t （对应的速度矢量为 \mathbf{v}_t ），其法向声阻抗率为 $z_{t,n}$ ，

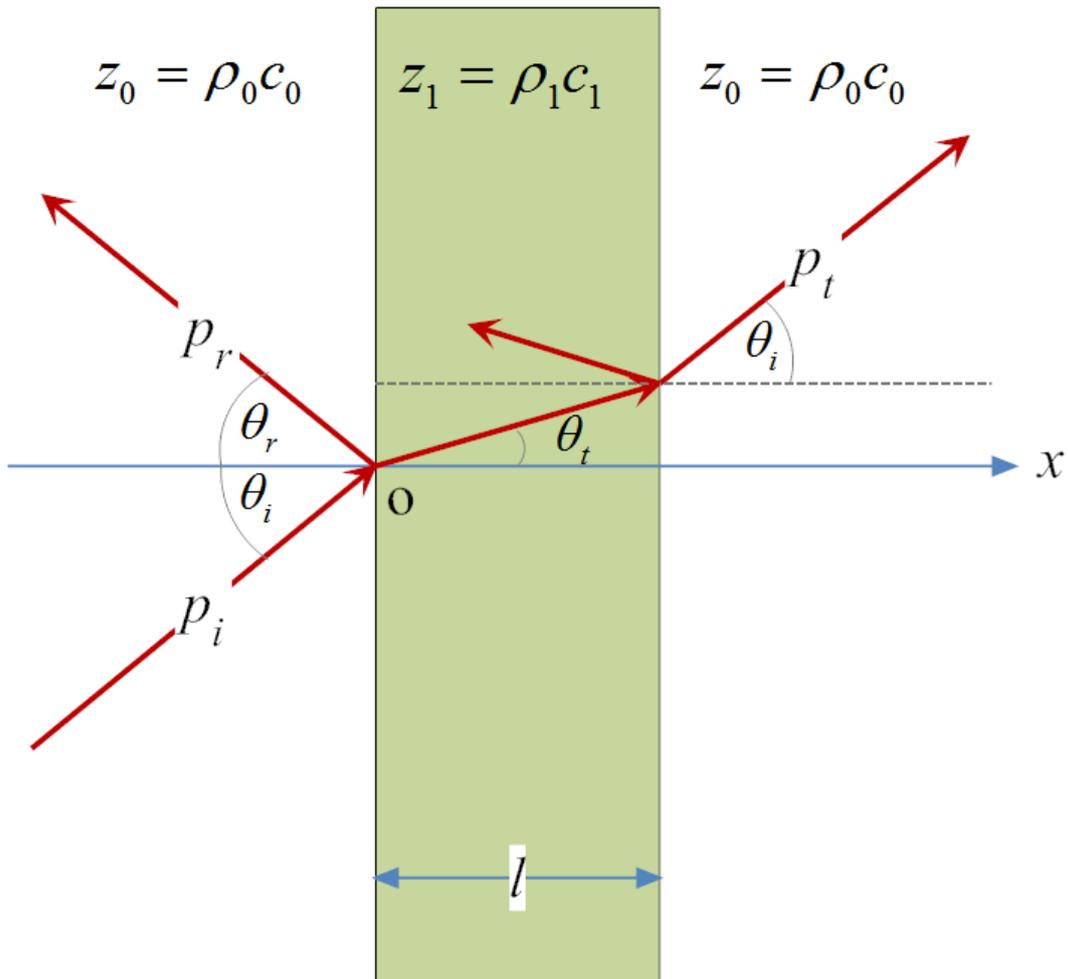
$$z_{t,n} = \frac{p_t}{\mathbf{v}_t \cdot \mathbf{n}} \Big|_{x=0} = \frac{z_1}{\cos \theta_t}$$

式中， θ_t 是声场的折射角，由折射定律确定。根据法向声阻抗的连续性方程(4-6-7)，它等于边界总的法向声阻抗率： $z_n = z_{t,n}$ 。

但一般情形下，界面法向声阻抗率 z_n 不一定等于 $z_{t,n}$ 。例如，在图二所示的无限媒质（特性声阻抗率为 $z_0 = \rho_0 c_0$ ）中，置有厚度为 l 的一层其它媒质（隔层），特性声阻抗率为 $z_1 = \rho_1 c_1$ 。显然，透射波的法向声阻抗率为 z_{0n} 。又根据法向声阻抗率的连续性(4-6-7)，透射面上的法向阻抗率等于 z_{0n} 。根据法向声阻抗率的连续性(4-6-7)和阻抗转移公式(4-6-8)，可以求得入射面（ $x=0$ ）上的法向声阻抗率 z_n 为

$$z_n \Big|_{x=0} = z_{1n} \frac{z_{0n} + j z_{1n} \tan k_1 l}{z_{1n} + j z_{0n} \tan k_1 l}, \left(k_1 = \frac{\omega}{c_1} \cos \theta_t, z_{1n} = \frac{z_1}{\cos \theta_t} \right)$$

式中， k_1 是隔层中的声波数在法向（ x ）的投影， z_{1n} 是隔层的行波法向声阻抗率。可见，此法向声阻抗率既不等于隔层的行波法向声阻抗率 z_{1n} ，也不等于透射层的行波法向声阻抗率 z_{0n} ，而且与声波频率和隔层参数（如厚度 l ，声特性阻抗率 z_1 ）有关。



图二、隔层的声反射与透射。

四、法向声阻抗率与界面透射（吸声）系数

既然法向声阻抗率刻画了界面的声学特征，则已知法向声阻抗率就完全可以获知声波在界面的行为。例如，已知界面法向声阻抗率 z_n ，可以根据公式(4-6-6)求出界面的反射系数，也可以求出平面波在界面上的透射声强系数：

$$I_t = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(p^* v_n)_{x=0} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{z_n} \right) |p|_{x=0}^2, \left(v_n = \frac{p}{z_n} \right)$$

把(4-6-3)、(4-6-4)中的声压 p 代入，得到

$$I_t = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{z_n} \right) |p_{i0}|^2 |1 + r_p|^2$$

而法向入射声强为

$$I_i = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(p_i^* \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n})_{x=0} = \frac{|p_{i0}|^2}{2z_{0n}}$$

故而声强反射系数为

$$t_I = \frac{I_t}{I_i} = \operatorname{Re} \left(\frac{z_{0n}}{z_n} \right) |1 + r_p|^2$$

把反射系数公式（6）代入，得到

$$t_I = \frac{4z_{0n} \operatorname{Re}(z_n)}{|z_{0n} + z_n|^2} = 1 - |r_p|^2$$

此比值即为声强透声系数。某种意义上，透射声功率也就是界面单位面积上所吸收的声功率，故声强透射系数就是界面的吸声系数。

引自：<http://xlwangnu.blog.163.com/blog/static/190719270201192502043374/>

全反射状态的声场与声能流

Sound Fields and Energy Flux under Total Reflection

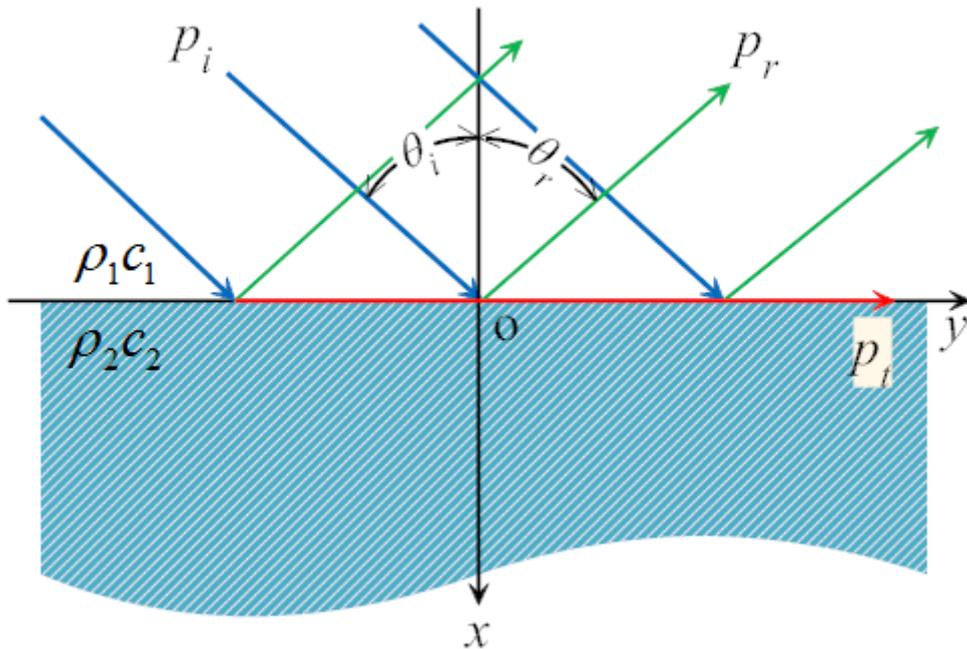
南京大学声学研究所 王新龙

全反射是常见声光现象。在媒质交界面上，若入射媒质的声速不如透射媒质的（或折射率小于1），则当入射角足够大就会发生全反射，入射声能悉数反射。虽然如此，全反射下声场如何分布？透射媒质中是否仍存在声场？如存在，取何种波动方式？此正本文试图回答的问题。分析表明，在全反射下，（1）入射媒质中的总声场在界面法向呈驻波形式，而在界面切向呈行波形式；（2）仍存在透射声波，但以沿界面传播的表面波形式存在，在垂直于界面的方向上指数衰减。

若透射媒质的声速 c_2 大于入射媒质的声速 c_1 ，且入射角（incident angle） θ_i 大于全反射临界角 θ_{ic} ，

$$\theta_{ic} = \arcsin \frac{c_1}{c_2} = \arcsin n, \left(n = \frac{c_1}{c_2} < 1 \right) \quad (4-7-1)$$

声波全部反射。此即著名的声全反射现象（total reflection）。与光的全反射略有不同，声的全反射一般发生的“硬界面”，如从空气到水，从水到固体。光的全反射则发生在“软表面”——从光密介质入射到光疏介质，如光纤内的光反射，故而一般称之为全内反射（Total internal reflection）。或问：在全反射状态，声场分布如何？声能又如何传播？此正本文所欲讨论的。



图一、全反射示意：红色箭头表示折射方向。

声场分布

如图一所示，频率为 ω 的平面声波从声特性阻抗率为 $\rho_1 c_1$ 的媒质中以角度 θ_i

入射到声特性阻抗率为 $\rho_2 c_2$ 的媒质上。设入射方向和两媒质边界的法向构成的平面为 (x, y) 平面， x 轴沿边界内法向， y 轴在边界平面上。根据平面行波论，入射（incident）、反射（reflected）和透射（transmitted）的声场解各具如下形式：

$$\begin{aligned} p_i &= p_{ia} \mathbf{e}^{-jk_1 \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{r}}, \mathbf{v}_i = \frac{p_i}{\rho_1 c_1} \mathbf{n}_i \\ p_r &= p_{ra} \mathbf{e}^{-jk_1 \mathbf{n}_r \cdot \mathbf{r}}, \mathbf{v}_r = \frac{p_r}{\rho_1 c_1} \mathbf{n}_r, (p_{ra} = p_{ia} r_p) \\ p_t &= p_{ta} \mathbf{e}^{-jk_2 \mathbf{n}_t \cdot \mathbf{r}}, \mathbf{v}_t = \frac{p_t}{\rho_2 c_2} \mathbf{n}_t, (p_{ta} = p_{ia} t_p) \end{aligned} \quad (4-7-2)$$

式中， p_{ia} 、 p_{ra} 和 p_{ta} 分别为入射、反射和透射（折射）波的声压幅度， r_p 和 t_p 分别为声压反射系数和透射系数， θ_t 为折射角（refracted angle）， k_1 和 k_2 分别入射和透射媒质的波数，而 \mathbf{n}_i 、 \mathbf{n}_r 和 \mathbf{n}_t 则依次为入射、反射和折射波的方向矢量，

$$\mathbf{n}_i = (\cos \theta_i, \sin \theta_i), \mathbf{n}_r = (-\cos \theta_i, \sin \theta_i), \mathbf{n}_t = (\cos \theta_t, \sin \theta_t) \quad (4-7-3)$$

在 \mathbf{n}_r 表式中，已利用了关系 $\theta_r = \theta_i$ 。为简洁起见，本文一概省略时间因子 $\exp(j\omega t)$ 。

根据 Snell 定律（折射律），

$$\sin \theta_t = \frac{\sin \theta_i}{n}, (n < 1) \quad (4-7-4)$$

当 $\theta_i > \theta_{ic}$ 时， $\sin \theta_t > 1$ ， θ_t 不复为实数而是复数。是以，作复变换： $\theta_t \rightarrow \psi$ ，

$$\theta_t = \frac{\pi}{2} + j\psi, \begin{cases} \sin \theta_t = \cosh \psi \\ \cos \theta_t = -j \sinh \psi \end{cases} \quad (4-7-5)$$

代入折射公式(4-7-4)，则 Snell 定律改为

$$\cosh \psi = \frac{\sin \theta_i}{n} \quad (4-7-6)$$

由此可知， ψ 具有实数解。当 θ_i 从 θ_{ic} 增至 $\pi/2$ 时， ψ 从 0 单调增大至 $\operatorname{arccosh}(1/n) > 0$ 。此处要提醒读者，数学上，变换(4-7-5)中的 ψ 可正可负。但考虑到下面公式(4-7-12)给出的透射声压解 p_t 中，声波必沿 x 正向衰减， ψ 只能取正值。引入变换(4-7-5)后，全反射（ $\theta_i > \theta_{ic}$ ）状态下的声压反射系数 r_p 和透射系数 t_p 可表为

$$\begin{cases} r_p = \frac{p_{ra}}{p_{ia}} = \frac{m \cos \theta_i + jn \sinh \psi}{m \cos \theta_i - jn \sinh \psi} = e^{2j\varphi}, \\ t_p = \frac{p_{ta}}{p_{ia}} = \frac{2m \cos \theta_i}{m \cos \theta_i - jn \sinh \psi} = 2 \cos \varphi e^{j\varphi}, \end{cases} \left(m = \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \quad (4-7-7)$$

式中的相位角 φ 由下列公式给出

$$\tan \varphi = \frac{n \sinh \psi}{m \cos \theta_i} = \frac{\rho_1 c_1 \sinh \psi}{\rho_2 c_2 \cos \theta_i}, \left(0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2} \right) \quad (4-7-8)$$

从公式(4-7-7)可见，当入射角 θ_i 大于临界角 θ_{ic} 时，反射波的振幅等于入射的 ($|r_p|=1$)，但入射和反射声压间存在 2φ 的相位差。把 $r_p=\exp(2j\varphi)$ 代入入射和反射声压表达式(4-7-2)，两者相加再简化，得到入射侧的总声压场 p_1 的速度场 $\mathbf{v}_1=(v_{1,x}, v_{1,y})$ 的表达式

$$\begin{aligned} p_1 &= p_i + p_r = 2p_{ia} \cos(k_1 x \cos \theta_i + \varphi) e^{-j(k_1 y \sin \theta_i - \varphi)} \\ v_{1,x} &= v_{ix} + v_{rx} = 2v_{ia} \sin(k_1 x \cos \theta_i + \varphi) \cos \theta_i e^{-j\left(k_1 y \sin \theta_i - \varphi + \frac{\pi}{2}\right)} \\ v_{1,y} &= v_{iy} + v_{ry} = 2v_{ia} \cos(k_1 x \cos \theta_i + \varphi) \sin \theta_i e^{-j(k_1 y \sin \theta_i - \varphi)} \end{aligned} \quad (4-7-9)$$

$$\left(v_{ia} = \frac{p_{ia}}{\rho_1 c_1} \right)$$

式中， v_{ia} 是入射声波质点速度振幅。可见，入射侧声场因全反射而在法向（负 x 方向）形成了驻波，但沿界面（ y 方向）仍是传播的。沿界面的传播的相速度和波长分别为

$$\begin{aligned} c_{1y} &= \frac{\omega}{k_1 \sin \theta_i} = \frac{c_1}{\sin \theta_i} \geq c_1 \\ \lambda_{1y} &= \frac{2\pi}{k_1 \sin \theta_i} = \frac{\lambda_1}{\sin \theta_i} \geq \lambda_1 \end{aligned} \quad (4-7-10)$$

所以，沿界面传播的相速度大于入射媒质的常规声速 $c_1=\omega/k_1$ ，波长 λ_{1y} 比常规波长 $\lambda_1=k_1/2\pi$ 要长；仅当入射波完全平行于界面 ($\theta_i=\pi/2$) 时， $c_{1y}=c_1$ ， $\lambda_{1y}=\lambda_1$ 。公式(4-7-9)也表明，在全反射下，法向驻波声场存在依赖于入射角 θ_i 的相位 φ ，故驻波的波节和波腹位置因入射角 θ_i 变化而发生漂移。值得注意的是，在临界全反射 ($\theta_i=\theta_{ic}$) 下， $\varphi=0$ ， $t_p=2$ ，即透射声压是入射的两倍。当入射角 $\theta_i \rightarrow \pi/2$ （最大入射角）时，相位 $\varphi: 0 \rightarrow \pi/2$ ，透射系数的幅值 $|t_p|$ 从 2 降至 0。从公式(4-7-9)还可以看出，在入射侧的任意位置，速度分量位相相差 90° ，流体质点在 (x, y) 平面上围绕平衡位置作椭圆运动，与单纯的行波声场不同。

Equation

把变换(4-7-5)代入(4-7-3)式中的 \mathbf{n}_t 表达式，结果：

$$\mathbf{n}_t = (-j \sinh \psi, \cosh \psi) \quad (1)$$

$$\mathbf{n}_i = (-j \sinh \psi, \cosh \psi) \quad (4-7-11)$$

即透射波矢 $\mathbf{k}_t = k_2 \mathbf{n}_t$ 的法向分量是虚数，表明透射波在 x 方向是非传播的。利用(4-7-7)式给出的透射系数 t_p 和公式(4-7-11)，公式(4-7-2)中的透射声压 p_t 和速度矢量 $\mathbf{v}_t = (v_{t,x}, v_{t,y})$ 经整理可进一步表为

$$\begin{aligned} p_t &= 2p_{ia} \cos \varphi e^{-k_2 x \sinh \psi - j(k_2 y \cosh \psi - \varphi)} \\ v_{t,x} &= \frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2} 2v_{ia} \cos \varphi \sinh \psi e^{-k_2 x \sinh \psi - j(k_2 y \cosh \psi - \varphi + \frac{\pi}{2})} \\ v_{t,y} &= \frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2} 2v_{ia} \cos \varphi \cosh \psi e^{-k_2 x \sinh \psi - j(k_2 y \cosh \psi - \varphi)} \end{aligned} \quad (4-7-12)$$

此表明，在全反射下透射波是沿界面传播、但法向衰减的声表面波（surface waves）——仅存于边界附近的声波，类似于固体表面的瑞利波（Rayleigh waves）。透射波的幅度随离边界之深度 x 而指数衰减，若令 $k_2 x \sinh \psi = 1$ ，则得到表面波的“透射深度” $x=d$ 为：

$$2\pi \frac{d}{\lambda_2} = \frac{1}{\sinh \psi} = \frac{n}{\sqrt{\sin^2 \theta_i - n^2}} \quad (4-7-13)$$

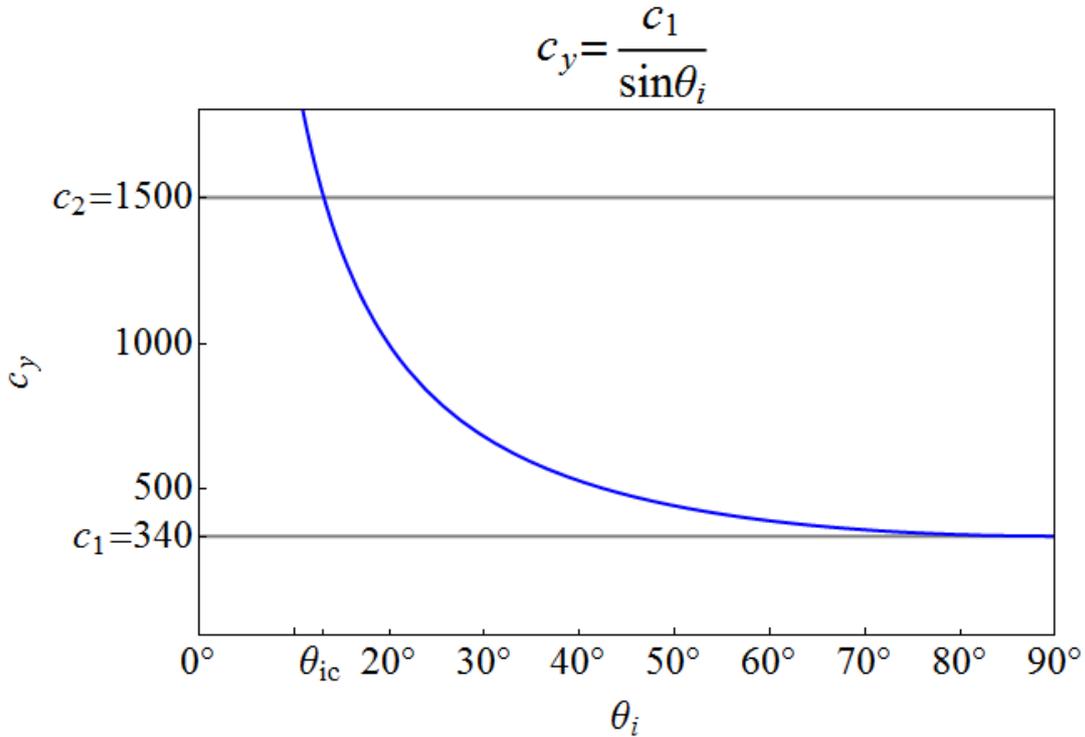
所以，透射深度 d 是入射角 θ_i 的函数。当入射角 θ_i 大于但接近于临界角 θ_{ic} 时，透射深度 d 很大；若 $\theta_i = \theta_{ic}$ ，则 $\psi \rightarrow 0$ ， $d \rightarrow \infty$ ，透射声波在 x 方向均匀，此正是沿 y 方向传播的平面波。从公式(4-7-12)还可以看出，在透射侧的任意位置，速度分量位相相差 90° ，流体质点在 (x, y) 平面上围绕平衡位置作椭圆运动，这也是一般表面波声场的特性。从公式(4-7-12)可知，沿平行于表面的 y 方向传播的相声速和波长 λ_{2y} 分别为

$$\begin{aligned} c_{2y} &= \frac{\omega}{k_2 \cosh \psi} = \frac{c_2}{\cosh \psi} < c_2 \\ \lambda_{2y} &= \frac{2\pi}{k_2 \cosh \psi} = \frac{\lambda_2}{\cosh \psi} < \lambda_2 \end{aligned} \quad (4-7-14)$$

即，全反射下透射波沿界面的传播速度 c_{2y} 小于常规声速 c_2 。根据公式(4-7-6)以及 $c_1 = nc_2$ 和 $\lambda_1 = n\lambda_2$ ，比较公式(4-7-10)和(4-7-14)知

$$c_{1y} = c_{2y}, \lambda_{1y} = \lambda_{2y}$$

所以，在界面两侧，沿界面传播的相速度和波长是相等的。其实，根据 Snell 定律， $k_1 \sin \theta_i = k_2 \sin \theta_t$ ，这一结论对任意入射皆成立。如图二所示，随着入射角从临界角增大，表面波的相速度从 c_2 降低到 c_1 。



图二、从空气入射到水中沿气水界面方向传播（表面波）的相速度与入射角的关系（蓝线）。

入射侧的声强和声能密度

根据公式（2），入射和反射声强分别为

$$\mathbf{I}_i = \frac{1}{2} \text{Re}(p_i^* \mathbf{v}_i) = I_0 \mathbf{n}_i, \left(I_0 = \frac{|p_i|^2}{2\rho_1 c_1} \right) \quad (4-7-15)$$

$$\mathbf{I}_r = \frac{1}{2} \text{Re}(p_r^* \mathbf{v}_r) = I_0 \mathbf{n}_r, \left(\because |p_r|^2 = |p_i|^2 \right)$$

其中 I_0 乃入射声强。可见，在全反射下， $|\mathbf{I}_r| = |\mathbf{I}_i| = I_0$ 。入射侧的总声强为

$$\mathbf{I}_1 = \frac{1}{2} \text{Re}(p_1^* \mathbf{v}_1) = \frac{1}{2} \text{Re}[(p_i^* + p_r^*)(\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_r)] = \mathbf{I}_i + \mathbf{I}_r + \frac{1}{2} \text{Re}(p_i^* \mathbf{v}_r + p_r^* \mathbf{v}_i)$$

最后一项反映了入射和反射之间的干涉（interference）。把公式（2）代入，

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \text{Re}(p_i^* \mathbf{v}_r + p_r^* \mathbf{v}_i) \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} \left(\frac{p_i^* p_r}{\rho_1 c_1} \mathbf{n}_r + \frac{p_r^* p_i}{\rho_1 c_1} \mathbf{n}_i \right), \left(\because \mathbf{v}_i = \frac{p_i}{\rho_1 c_1} \mathbf{n}_i, \mathbf{v}_r = \frac{p_r}{\rho_1 c_1} \mathbf{n}_r \right) \\ &= \text{Re} \left(r_p e^{2jk_1 x \cos \theta_i} \mathbf{I}_r + r_p^* e^{-2jk_1 \cos \theta_i} \mathbf{I}_i \right), \left(\because p_{ra} = r_p p_{ia} \right) \\ &= \text{Re} \left[e^{2j(k_1 x \cos \theta_i + \varphi)} \mathbf{I}_r + e^{-2j(k_1 \cos \theta_i x + \varphi)} \mathbf{I}_i \right], \left(\because r_p = e^{j2\varphi} \right) \\ &= \cos(2k_1 x \cos \theta_i + 2\varphi) (\mathbf{I}_r + \mathbf{I}_i) \end{aligned}$$

所以，

$$\begin{aligned}
 \mathbf{I}_1 &= \mathbf{I}_i + \mathbf{I}_r + \cos 2(k_1 x \cos \theta_i + \varphi)(\mathbf{I}_r + \mathbf{I}_i) \\
 &= 4I_0 \sin \theta_i \cos^2(k_1 x \cos \theta_i + \varphi) \hat{\mathbf{e}}_y
 \end{aligned} \tag{4-7-16}$$

其中 $\hat{\mathbf{e}}_y$ 是沿 y 方向的单位矢量。可见，入射侧总声强的方向与反射面平行，在法向声强呈“条纹”状分布，其 x 方向（法向）的周期平均值为：

$$\langle \mathbf{I}_1 \rangle = 2I_0 \sin \theta_i \hat{\mathbf{e}}_y \tag{4-7-17}$$

把声场表达式（9）直接代入声能密度公式，

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{4} \rho_1 |\mathbf{v}_1|^2 + \frac{1}{4} \frac{|p_1|^2}{\rho_1 c_1^2}$$

得到入射侧的声能密度 ε_1 及其法向（ x ）的空间平均值 $\langle \varepsilon_1 \rangle$ ：

$$\varepsilon_1 = 2\varepsilon_0 [1 + \sin^2 \theta_i \cos(2k_1 x \cos \theta_i + 2\varphi)], \langle \varepsilon_1 \rangle = \varepsilon_0, \left(\varepsilon_0 = \frac{p_{ia}^2}{2\rho_1 c_1^2} \right) \tag{4-7-18}$$

式中， ε_0 是入射平面声波的声能密度。如此，公式（17）可表示成

$$\langle \mathbf{I}_1 \rangle = \hat{\mathbf{e}}_y \langle \varepsilon_1 \rangle c_{1g}, \quad (c_{1g} = c_1 \sin \theta_i) \tag{17a}$$

即，能量是以小于自由空间声速 c_1 的速度 c_{1g} 沿界面传播的，这与公式（10）给出的相速度 c_{1y} 正好相反。无论入射波还是反射波，作为平面行波声能在单位时间内传播距离等于相速度 c_1 ，但从图一可见，这段距离在界面方向的投影是 $c_1 \sin \theta_i$ ，故声能实际传播的速度是 $c_{1g} = c_1 \sin \theta_i$ 。

透射侧的声强与声能密度

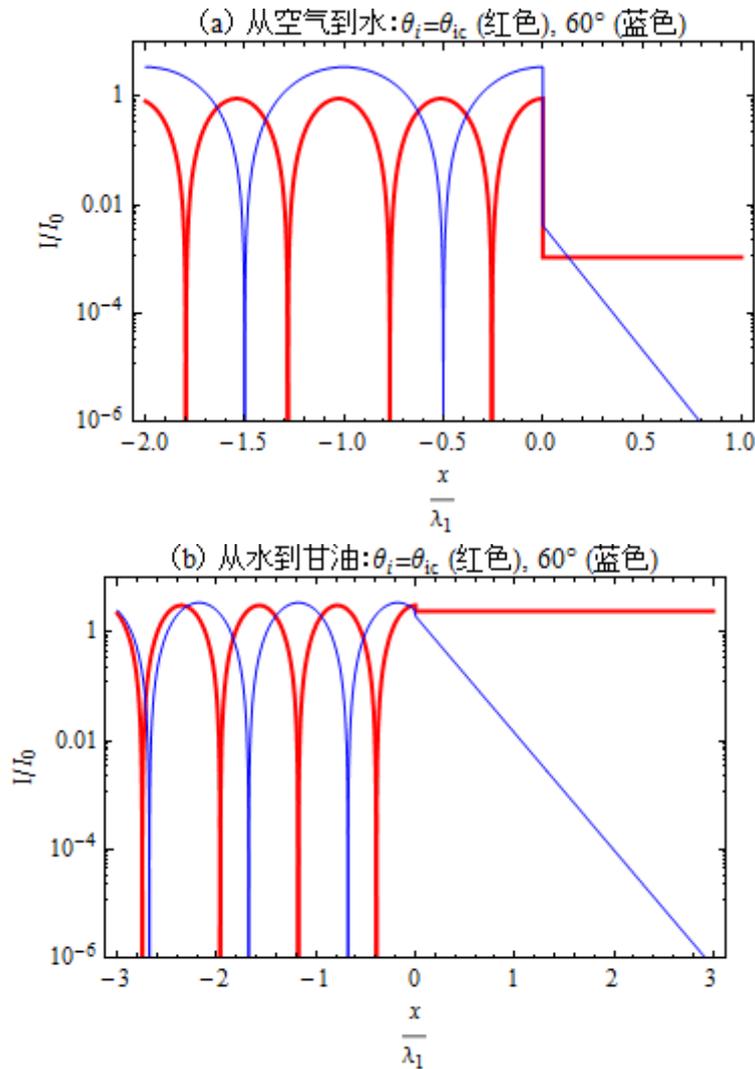
利用公式（11）和（12），得到透射声强

$$\begin{aligned}
 \mathbf{I}_2 &= \frac{1}{2} \text{Re}(p_t^* \mathbf{v}_t) = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\frac{|p_t|^2}{\rho_2 c_2} \mathbf{n}_t \right) = 4I_0 \frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2} \cos^2 \varphi \cosh \psi e^{-2k_2 x \sinh \psi} \hat{\mathbf{e}}_y \\
 &= 4I_0 \frac{\rho_1}{\rho_2} \sin \theta_i \cos^2 \varphi e^{-2k_2 x \sinh \psi} \hat{\mathbf{e}}_y, \quad \left(n = \frac{c_1}{c_2}, n \cosh \psi = \sin \theta_i \right)
 \end{aligned} \tag{19}$$

声能沿界面（ y 方向）传播，但沿 x 方向指数衰减。掠入射时， $\theta_i \rightarrow \pi/2$ ， $\varphi \rightarrow \pi/2$ ， $\mathbf{I}_2 \rightarrow 0$ 。当入射波完全平行于边界传播时，声波与边界无耦合（流体质点速度沿切向），故无透射声（ $\mathbf{I}_2 = 0$ ）。此乃理想流体之必然。对黏性流体，黏滞力的存在使得边界导致切向耦合，结果会产生黏滞边界效应。下图三（a）是声波从空中入射到水中发生全反射时声强在界面两侧法向的分布。从公式（16）和（19）可知，边界两侧声强不连续，两者的比值为

$$\frac{|\mathbf{I}_2|}{|\mathbf{I}_1|_{x=0}} = \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

因空气和水的密度相差巨大，水中的透射声强 $|\mathbf{I}_2|$ 很小，且当 $\theta_i > \theta_{ic}$ 时衰减很快。但是，如果两媒质的密度相差不远，则透射声强可以足够大，如图（b）所示。



图三、全反射时声强的法向分布。

从公式（15）可知，单位横截面积入射的能量全部反射。从图一可见，在全反射下单位入射横截面积对应的透射横截面为零，而根据公式（19）透射声强又是有限的（ $\mathbf{I}_2 < \infty$ ），所以单位横截面积入射的声能几无透射，能量保持守恒。诚然，如公式（19）表面，在全反射状态下，透射媒质中沿边界附近仍存在表面声能，其成因是声场趋向稳态之前的瞬态效应。

同理，根据声场分布（12），可得到全反射下透射声场的能量密度，

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{4} \rho_2 \left(|v_{t,x}|^2 + |v_{t,y}|^2 \right) + \frac{|p_t|^2}{4\rho_2 c_2^2} = 4 \frac{\rho_1}{\rho_2} \varepsilon_0 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta_i e^{-2jk_2 x \sinh \psi}, \quad \left(\varepsilon_0 = \frac{|p_{ia}|^2}{2\rho_1 c_1^2} \right)$$

比较 (19) 与 (20) 知, 全反射下透射媒质的声强 \mathbf{I}_2 和声能密度 ε_1 具有如下的关系

$$\mathbf{I}_2 = \varepsilon_2 c_{2g} \hat{\mathbf{e}}_y, \quad (c_{2g} = c_2 \operatorname{sech} \psi < c_2) \quad (20)$$

式中, c_{2g} 是声波能量的传播速度。所以, 表面波的能量传播速度与由公式 (14) 所给出的相速度 c_{2y} 相等, 都小于透射媒质自由声波的传播速度 c_2 。

引自: <http://xlwangnu.blog.163.com/blog/static/1907192702013016102326102/>

声能与声强

Energy and Intensity of Sound Waves

南京大學聲學研究所 王新龍

【摘要】 声场作为连续媒质的弹性振动而具有机械能量——声能，而声能密度描述了声能的空间分布。声波作为振动扰动的传播本质上是声能的传输，而声强描述了声能传输的强弱和方向。本文针对理想流体阐述声能和声强的概念及其数学表述，并讨论声能和声强的复数表示与运算。

一、声能流与声能

设流体的静密度 ρ_0 ，声速 c_0 。流体的声场可由声压 p 或质点振速（矢量） \mathbf{v} 描述。对于声场空间内的任意有向面元 $d\mathbf{S}$ 而言， dt 时间内声压作用其上所作的功为力矢量 $p d\mathbf{S}$ 和位移矢量 $\mathbf{v} dt$ 之点积。所以，单位时间内经面元 $d\mathbf{S}$ 的声能量（**声功率**）为 $dW = (p d\mathbf{S}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{I} \cdot d\mathbf{S}$ ，其中

$$\mathbf{I} = I \mathbf{n} = p \mathbf{v}, (I = \mathbf{n} \cdot \mathbf{I}) \quad (4-8-1)$$

是单位时间内通过与速度 \mathbf{v} 方向相垂直的单位面积内的声能量，谓之**声能流密度**或**声能通量密度**。 \mathbf{I} 是矢量，量值 I （标量），方向 \mathbf{n} （单位矢量）与质点振速 \mathbf{v} 相同，也就是声波的传播方向。流经任意有向曲面 S 的**声能通量**（**声功率**）为

$$W = \iint_S dW = \iint_S \mathbf{I} \cdot d\mathbf{S} \quad (4-8-2)$$

声场作为连续媒质的质点振动具有能量——**声能**。设某流体质点体积 $\Delta V \rightarrow 0$ ，在声扰动下发生压缩膨胀。线性声学假定声波是微扰。根据绝热压缩系数 β 的定义，因压强的变化 $dP = dp$ 而导致的体积变化为 $d\Delta V = -\beta_0 \Delta V dp$ ，其中 β_0 是静态的绝热压缩系数，其倒数是流体的体弹性系数 κ_0 ：

$$\beta_0 = \frac{1}{\kappa_0}, \kappa_0 = \rho_0 c_0^2$$

当该质点从平衡态（ $p=0$ ）扰动到声压 p 的振动态时，质点具有体弹性势能

$$\Delta E_p = -\int_0^p p d\Delta V = \beta_0 \Delta V \int_0^p p dp = \frac{1}{2} \beta_0 p^2 \Delta V$$

除此之外，流体质点具有动能

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} (\rho_0 \Delta V) v^2, (v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v})$$

式中，标量 v 是振速矢量 \mathbf{v} 的量值。质点的总能量 ΔE 是动能和势能之和，除以其体积 ΔV （ $\rightarrow 0$ ）而得到单位体积的声能——**声能密度** ε **【1】**

$$\varepsilon = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta E}{\Delta V} = \frac{1}{2} \rho_0 v^2 + \frac{1}{2} \beta_0 p^2 \quad (4-8-3)$$

利用媒质声压 p 与容变率 Δ 的弹性关系: $p = -\kappa_0\Delta$, 声能密度 ε 也可表为

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\rho_0v^2 + \frac{1}{2}\kappa_0\Delta^2$$

其与单振子能量、弦振动的能量密度形式一致。

• 平面行波的特殊情形

对于平面行波（并非一定是简谐的），声压 p 与振速 \mathbf{v} 之间存在关系，

$$\mathbf{v} = \frac{p}{z_0}\mathbf{n}, (z_0 = \rho_0c_0) \quad (4-8-4)$$

式中, z_0 是媒质的声特性阻抗率。由公式(4-8-3)可知, 平面行波的**动能密度等于势能密度**, 为平面行波的特性之一。把公式(4-8-4)代入(4-8-1)和(4-8-3), 声能流密度和声能密度可简化为,

$$I = z_0v^2 = \frac{p^2}{z_0}, (\mathbf{I} = \mathbf{n}I)$$

$$\varepsilon = \rho_0v^2 = \beta_0p^2$$

不难看出, 行波的声能流密度 \mathbf{I} 和声能密度 ε 之间存在简单关系:

$$\mathbf{I} = \varepsilon c_0\mathbf{n}, (I = \varepsilon c_0)$$

它表明, 单位时间内流过垂直于传播方向的单位面积上的声能是体积 $1 \times c_0$ 之内的声能。故而, c_0 亦行波声能的传输速度, 传输的方向与波的传播方向 \mathbf{n} 一致。但读者当铭记, 一般而言, **动能密度不一定等于势能密度, 声能的传播速度也不一定等于声速 c_0** 。

二、声能守恒

现设公式 (2) 中的积分面 S 是包围某流体体积 V 的封闭边界曲面。根据高斯定理, 经 S 流出 V 的声能通量是

$$W = \oiint_S \mathbf{I} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{I} dV, \quad (dV = dx dy dz)$$

从后一等式可知, 声能流密度矢量 \mathbf{I} 的散度 $\text{div}(\mathbf{I})$ 是单位时间内从单位体积的流体所流出的声能。体积 V 内所具有的总声能 E 为:

$$E = \iiint_V \varepsilon dV = \frac{1}{2\rho_0c_0^2} \iiint_V [(\rho_0c_0v)^2 + p^2] dV \quad (4-8-5)$$

既然体积 V 内无源, 则能量守恒定律要求体积 V 内所增加的声能等于经包围 V 的封闭曲面 S 流入的声能, 即 $dE/dt = -W$ 。把上列 W 和 E 的表达式代入, 得到声能守恒的积分方程表述:

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \varepsilon dV + \oiint_S \mathbf{I} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

对于空间固定的体积 V (S 当然也固定)，上式第一项积分号外的时间微商可以置于积分号内（但必须改为时间偏导数），而根据高斯定理第二项面积分可化为 V 的体积分，结果，

$$\iiint_V \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} dV + \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{I} dV = 0$$

此积分对任意体积 V 恒成立，故被积函数必为零，从而得到微分方程

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{I} = 0 \quad (4-8-6)$$

它建立了声能密度 ε 的时间变化率与声能流密度 \mathbf{I} 的散度之间的关系。方程

(6) 是能量守恒定律的微分方程数学表述，类于质量守恒定律的数学描述——连续性方程。其实，它也可直接从声波基本方程严格导出。无源理想流体的声场由如下一对基本方程所支配

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p, \quad \frac{1}{\kappa_0} \frac{\partial p}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{v}$$

第一式点乘速度矢量 ($\cdot \mathbf{v}$)，第二式乘以声压 ($\times p$)，再两者相加，并利用矢量微分关系，

$$\mathbf{v} \cdot \nabla p + p \nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot (p\mathbf{v})$$

最后注意到公式 (1) 和 (3) 给出的 \mathbf{I} 和 ε ，立即得到方程 (6)。

三、拉格朗日密度

声波作为波动其物理量（包括声能流密度和声能密度）与拉格朗日密度关联。拉格朗日密度 L 乃声动能密度与势能密度之差：

$$-L = \frac{1}{2} \rho_0 \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} - \frac{1}{2} \beta_0 p^2$$

上式 L 之前之所以取负号仅仅为了为使后面的公式与标准形一致，但不影响由此而到处的结果。引入速度势 Φ ，

$$\mathbf{v} = -\nabla \Phi, \quad p = \rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

则拉格朗日密度 L 可表为

$$L = \frac{1}{2} \rho_0 \left[\left(\frac{1}{c_0} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right], \quad \left(\beta_0 = \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \right)$$

根据哈密顿原理， L 满足拉格朗日方程

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \Phi_t} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial \Phi_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial L}{\partial \Phi_y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial L}{\partial \Phi_z} \right) - \frac{\partial L}{\partial \Phi} = 0$$

把 L 的表达式代入立即得到速度势 Φ 所满足的无源声波方程（见《理想流体声波方程》的公式（15a））。上式中带下标的速度势（例如 Φ_t ）表示速度势 Φ 对下标所示变量的导数。

利用拉格朗日密度 L 可以导出诸多具有重要物理意义的波动量【2】：

$$W_{i,j} = \Phi_i \frac{\partial L}{\partial \Phi_j} - L \delta_{i,j}, \quad (i, j = t, x, y, z)$$

式中， $\delta_{i,j}$ 是 Kronecker- δ 符号： $\delta_{i,i}=1$, $\delta_{i,j}=0$ ($i \neq j$)。特别是，从 L 可导出声能密度 ε 和声流密度矢量 $\mathbf{I} = (I_x, I_y, I_z)$ ：

$$\varepsilon = W_{tt} = \Phi_t \frac{\partial L}{\partial \Phi_t} - L = \frac{1}{2} \rho_0 (\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2 + c_0^{-2} \Phi_t^2)$$

$$= \frac{1}{2} \rho_0 v^2 + \frac{1}{2} \beta_0 p^2$$

$$I_x = W_{t,x} = \Phi_t \frac{\partial L}{\partial \Phi_x} = -\rho_0 \Phi_t \Phi_x = p v_x$$

$$I_y = W_{t,y} = \Phi_t \frac{\partial L}{\partial \Phi_y} = -\rho_0 \Phi_t \Phi_y = p v_y$$

$$I_z = W_{t,z} = \Phi_t \frac{\partial L}{\partial \Phi_z} = -\rho_0 \Phi_t \Phi_z = p v_z$$

$$\left[\mathbf{v} = -\nabla \Phi = -(\Phi_x, \Phi_y, \Phi_z) \right]$$

与公式（3）和（1）所给出的完全一致。

四、复数表示

上述所有的声场量（包括声能密度 ε 和声能流密度 \mathbf{I} ）皆实数量。根据《声学量的复数运算》，声学量也可用复数表示。下文一改此前，约定声学量的符号皆为复声学量；例如， p 、 \mathbf{v} 、 \mathbf{I} 和 ε 分别表示复声压、复振速、复声能流密度和复声能密度。对这些量取实部操作 Re ，才得所对应的实声学量。

必须强调指出，由于 \mathbf{I} 和 ε 等能量性质的量涉及声场量 p 和 \mathbf{v} 的乘积，运算时务必小心。例如，根据公式(4-8-1)，声能流密度 \mathbf{I} 应该是实数的声压 p 与实数的振速 \mathbf{v} 之积，用复数量表达则该公式应改写为

$$\mathbf{Re}(\mathbf{I}) = \mathbf{Re}(p) \times \mathbf{Re}(\mathbf{v})$$

经简单代数运算，

$$\begin{aligned} \mathbf{Re}(\mathbf{I}) &= \frac{1}{2}(p + p^*) \times \frac{1}{2}(\mathbf{v} + \mathbf{v}^*) = \frac{1}{4}(p^* \mathbf{v} + p \mathbf{v}) + \frac{1}{4}(p^* \mathbf{v} + p \mathbf{v})^* \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{Re}(p^* \mathbf{v} + p \mathbf{v}) \end{aligned}$$

由此得到复声能流密度矢量 \mathbf{I} (记住仍用符号 \mathbf{I})

$$\mathbf{I} = \frac{1}{2} p \mathbf{v} + \frac{1}{2} p^* \mathbf{v} \quad (4-8-7)$$

类似地，对应公式(4-8-3)的复声能密度 ε 可表为

$$\varepsilon = \frac{1}{4}(\rho_0 \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \beta_0 p^2) + \frac{1}{4}(\rho_0 \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{v} + \beta_0 |p|^2) \quad (4-8-8)$$

其实部 $\mathbf{Re}(\varepsilon)$ 是实的声能密度。

下文为避免繁琐（除非特别说明），统称这些复声学量为声压、振速、声能流密度和声能密度，而不复在名称前冠以“复”字，读者当不至于混淆。唯要牢记的是，有物理意义者乃这些量之实部耳。

五、声强与平均声能密度

由于声能流密度矢量 \mathbf{I} 的方向始终同于流体质点振速矢量 \mathbf{v} 的方向或声传播方向 \mathbf{n} ，在不涉及 \mathbf{I} 的方向的场合，仅用矢量 \mathbf{I} 的大小 I 足矣。

声波多呈周期性，且绝大多数情形下是简谐的，至少短期内如此。人们因此更关心的是声学量、特别是与能量有关的量的周期平均值。况且，多数声学仪器所测得的是周期平均值。因此，下文一律假定声波是频率为 ω 的时间简谐波，声压 $p \propto \exp(j\omega t)$ ，振速 $\mathbf{v} \propto \exp(j\omega t)$ 。如是，则公式(4-8-7)和(4-8-8)的第一项皆含时间因子 $\exp(2j\omega t)$ ，表示声能流密度和声能密度的瞬变，其时间均值等于零。而两式的第二项则无关乎时间，是“直流”分量。故而，声能流密度的时间均值（用顶杠“—”表示）为：

$$\bar{I} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} I dt = \frac{1}{2} p^* \mathbf{v}$$

式中 v 是振速矢量 \mathbf{v} 的大小： $v = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ ，其实部

$$\mathbf{Re}(\bar{I}) = \overline{\mathbf{Re}(I)} = \frac{1}{2} \mathbf{Re}(p^* \mathbf{v}) \quad (4-8-9)$$

就是（实的）平均声能流密度，谓之**声强**（intensity of sound）。

同理，平均声能密度

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{4}(\rho_0 \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{v} + \beta_0 |p|^2) \quad (4-8-10)$$

已然实数——实的声能密度。可见，采用复数运算，极易计算平均值。

- 平面行波声波的特殊情形

对于平面简谐行波而言，声压 p 和速度 \mathbf{v} 矢量具有公式(4-8-4)所给出的简单关系。代入公式(4-8-9)和(4-8-10)，则得到声强和平均声能密度为

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(\bar{I}) &= \frac{|p|^2}{2z_0} \xrightarrow{z_0=\rho_0c_0} \frac{|p|^2}{2\rho_0c_0} \\ \bar{\varepsilon} &= \frac{1}{4} \left(\rho_0 \left| \frac{p}{z_0} \right|^2 + \beta_0 |p|^2 \right) \xrightarrow{z_0=\rho_0c_0, \beta_0=\frac{1}{\rho_0c_0^2}} \frac{|p|^2}{2\rho_0c_0^2} = \frac{\bar{I}}{c_0}\end{aligned}$$

- 非行波的平面波情形

对于非行波的平面波（例如，入射与反射叠加而成的平面波）而言，声压 p 和速度 \mathbf{v} 之间一般可用法向为传播方向 \mathbf{n} 的法向声阻抗率 z_s 相关联，即 $\mathbf{v} = (p/z_s)\mathbf{n}$ 。 z_s 一般是复数，可分解为实部的声阻率 $\operatorname{Re}(z_s)$ 和虚部的声抗率 $\operatorname{Im}(z_s)$ 。代入公式（9）和（10）分别得到

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(\bar{I}) &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{z_s} \right) |p|^2 = \operatorname{Re}(\eta_s) \times \frac{|p|^2}{2\rho_0c_0} \\ \bar{\varepsilon} &= \frac{1}{4} \left(\rho_0 \left| \frac{p}{z_s} \right|^2 + \beta_0 |p|^2 \right) = \frac{1+|\eta_s|^2}{2} \times \frac{|p|^2}{2\rho_0c_0^2}\end{aligned}$$

式中 $\eta_s = z_0/z_s$ 是声导纳率比。可见，如果声导率为零 $\operatorname{Re}(\eta_s)=0$ ，则声强等于零（即没有声能流），但是平均声能密度可以不为零。最简单的例子是一端封闭的**声管**，其内声导率处处等于零。因此，声导率刻画了声能的可传输性。

【1】详见杜功焕等著《声学基础》4.6.1节。

【2】参见 P. M. Morse 等著《理论声学》295页。

引自: <http://xlwangnu.blog.163.com/blog/static/190719270201301921936705/>

声波的干涉

Interference of Acoustic Waves

南京大學聲學研究所 王新龍 著

【摘要】 声波与声波之间存在相互作用，其结果产生声的干涉现象。声干涉使得声场空间出现了增强与相消效应。本文从声能的观点讨论两列沿空间任意方向传播的平面声波的干涉问题。结果表明，干涉之强弱不但取决于两列声波之间的相位差，而且依赖于两列声波传播方向的相对取向。结果表明，同向传播的声波干涉效应最显著，而反向传播的声波因相互独立而不具相干性；但是，反向声波可以形成驻波。

本文以前文《[声能与声强](#)》为基础，建议读者先阅读之。设理想流体的静密度 ρ_0 ，压缩系数 β_0 （或者声速 $c_0 = (\rho_0 \beta_0)^{-1/2}$ ）。流体的声场可用声压 p 或流体质点振速 \mathbf{v} 描述。本文一致假定，所有的声学量皆用复数表示。根据前文《[声能与声强](#)》的公式(4-8-7)和(4-8-8)，复声能流密度矢量 \mathbf{I} 和复声能密度 ε 为

$$\mathbf{I} = \frac{1}{2} p \mathbf{v} + \frac{1}{2} p^* \mathbf{v}^* \quad (4-9-1)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{4} (\rho_0 \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \beta_0 p^2) + \frac{1}{4} (\rho_0 \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{v} + \beta_0 |p|^2) \quad (4-9-2)$$

读者须牢记，只有实部 $\text{Re}(\mathbf{I})$ 和 $\text{Re}(\varepsilon)$ 才具有物理意义。

• 叠加声场的声能流密度和声能表达式

设有两列声波，声压分别为 p_1 和 p_2 ，对应的振速（矢量）分别为 \mathbf{v}_1 和 \mathbf{v}_2 。根据公式(4-9-1)和(4-9-2)，它们单独存在时各具有声能流密度（矢量）

$$\mathbf{I}_1 = \frac{1}{2} p_1 \mathbf{v}_1 + \frac{1}{2} p_1^* \mathbf{v}_1^*, \quad \mathbf{I}_2 = \frac{1}{2} p_2 \mathbf{v}_2 + \frac{1}{2} p_2^* \mathbf{v}_2^* \quad (4-9-3)$$

和声能密度

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{4} (\rho_0 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \beta_0 p_1^2) + \frac{1}{4} (\rho_0 \mathbf{v}_1^* \cdot \mathbf{v}_1 + \beta_0 |p_1|^2) \quad (4-9-4)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{4} (\rho_0 \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \beta_0 p_2^2) + \frac{1}{4} (\rho_0 \mathbf{v}_2^* \cdot \mathbf{v}_2 + \beta_0 |p_2|^2)$$

把叠加而成的声场的声压 $p=p_1$ 和 p_2 、振速 $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ 代入公式(4-9-1)，再经适当的初等运算，得到合成声场的声能流密度，

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \frac{1}{2} (p_1 \mathbf{v}_2 + p_2 \mathbf{v}_1) + \frac{1}{2} (p_1^* \mathbf{v}_2^* + p_2^* \mathbf{v}_1^*) \quad (4-9-5)$$

和声能密度

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \frac{1}{2}(\rho_0 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + \beta_0 p_1 p_2) + \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\rho_0 \mathbf{v}_1^* \cdot \mathbf{v}_2 + \beta_0 p_1^* p_2) \quad (4-9-6)$$

可见，一般而言， $\mathbf{I} \neq \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2$ ， $\varepsilon \neq \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ 。

- 时间简谐情形下的周期平均值

进一步设两列波是频率为 ω 的简谐声波，

$$p_1 \propto \exp(j\omega t), p_2 \propto \exp(j\omega t)$$

在此情形下，无论公式(4-9-3)还是公式(4-9-4)，第一项的时间因子 $\exp(2j\omega t)$ ，故其时间平均为零，而第二项是与时间无关的“直流”分量，故而两个成份声场单独存在时的平均声能流矢量——**声强**——为

$$\bar{\mathbf{I}}_i = \frac{1}{2} \overline{(p_i \mathbf{v}_i + p_i^* \mathbf{v}_i)} = \frac{1}{2} p_i^* \mathbf{v}_i, (i=1,2) \quad (4-9-7)$$

平均声能密度为

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_i &= \frac{1}{4} \overline{(\rho_0 \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i + \beta_0 p_i^2)} + \frac{1}{4} \overline{(\rho_0 \mathbf{v}_i^* \cdot \mathbf{v}_i + \beta_0 |p_i|^2)} \\ &= \frac{1}{4} (\rho_0 \mathbf{v}_i^* \cdot \mathbf{v}_i + \beta_0 |p_i|^2) \\ &(i=1,2) \end{aligned} \quad (4-9-8)$$

再次指出，此处所谓的**声强**（平均声流密度）是复的，其实部才是物理的**实声强**。同理，合成声场的公式(4-9-5)和(4-9-6)的第三项也具有时间因子 $\exp(2j\omega t)$ ，描述了声干涉的瞬时行为，故而其时间周期的平均值为零。而第四（最后）项显然与时间无关，描述了干涉的平均效果。结果，合成声场的平均声能流密度（矢量）为

$$\bar{\mathbf{I}} = \bar{\mathbf{I}}_1 + \bar{\mathbf{I}}_2 + \frac{1}{2} (p_2^* \mathbf{v}_1 + p_1^* \mathbf{v}_2) \quad (4-9-9)$$

平均声能密度为

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2 + \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\rho_0 \mathbf{v}_1^* \cdot \mathbf{v}_2 + \beta_0 p_1^* p_2) \quad (4-9-10)$$

从公式(4-9-9)和(4-9-10)可见，合成声场的声强和平均声能密度也不等于两个声场单独存在时相应量之和；额外的项（公式的最后一项）反映了声场的（平均）**干涉效应**。

公式(4-9-9)和(4-9-10)适用于任意两个简谐声场的叠加。为更好地理解声干涉现象，以下进一步探讨**平面行波**的干涉问题。

- 任意方向平面行波的干涉

如下图所示，两列平面行波声波的声压 p_1 和 p_2 可表为

$$p_1 = p_{1a} \mathbf{e}^{j(\omega t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x})}, p_2 = p_{2a} \mathbf{e}^{j(\omega t - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x})} \quad (4-9-11)$$

式中， p_{1a} 和 p_{2a} 分别为两列行波声压的复振幅， \mathbf{n}_1 和 \mathbf{n}_2 是传播方向的单位矢量，波数 $k = \omega/c_0$ 。由于流体声波是纵波，振速方向与传播方向平行，两列声波的振速与声压之间存在如下关系：

$$\mathbf{v}_1 = \frac{p_1}{z_0} \mathbf{n}_1, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{p_2}{z_0} \mathbf{n}_2 \quad (4-9-12)$$

式中 $z_0 = \rho_0 c_0$ 是媒质特性声阻抗率。如此，公式(4-9-7)和(4-9-8)可简化为：

$$\bar{\mathbf{I}}_i = \frac{|p_i|^2}{2z_0} \mathbf{n}_i, \bar{\varepsilon}_i = \frac{1}{2} \beta_0 |p_i|^2, \quad (i=1,2)$$

而合成声场的公式(4-9-9)可简化为

$$\bar{\mathbf{I}} = \bar{\mathbf{I}}_1 + \bar{\mathbf{I}}_2 + \frac{1}{2z_0} (p_1 p_2^* \mathbf{n}_1 + p_1^* p_2 \mathbf{n}_2)$$

不难验证，此公式也可表达为

$$\bar{\mathbf{I}} = \bar{\mathbf{I}}_1 + \bar{\mathbf{I}}_2 + \frac{1}{2z_0} [\operatorname{Re}(p_1 p_2^*) (\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2) - j \operatorname{Im}(p_1^* p_2) (\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2)]$$

其中的虚部因无物理意义而可弃之，故而，

$$\bar{\mathbf{I}} = \bar{\mathbf{I}}_1 + \bar{\mathbf{I}}_2 + \frac{1}{2z_0} \operatorname{Re}(p_1^* p_2) (\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2) \quad (4-9-13)$$

同理，公式(4-9-10)可化简为

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2 + \frac{1}{4} \beta_0 \operatorname{Re}(p_1^* p_2) \|\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2\|_2^2 \quad (4-9-14)$$

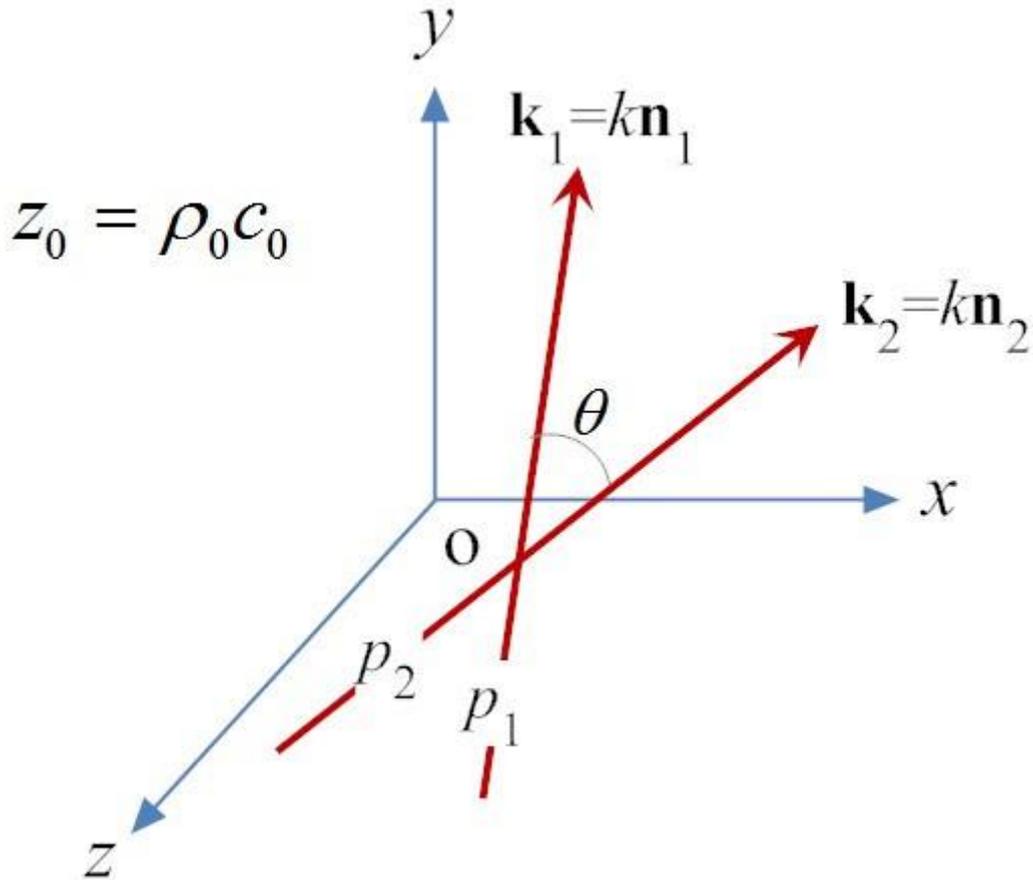
式中， $\|\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2\|_2$ 是和矢量 $(\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2)$ 的欧几里德长度 ($\|\mathbf{n}_1\|_2=1$, $\|\mathbf{n}_2\|_2=1$)。设 θ 是 \mathbf{n}_1 和 \mathbf{n}_2 之间的角度 (见下图)，即

$$\cos \theta = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2$$

则

$$\|\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2\| = 2 \cos \frac{\theta}{2}$$

从(4-9-13)和(4-9-14)两式可见，两列声波的干涉效应高度依赖于两者传播方向之间角 θ 。若两列行波的传播方向相同 ($\theta=0$)，则干涉效应最显著；相反，若两列行波的传播方向正好相反 ($\theta=\pi$)，则无干涉效应。



图、两列沿不同方向传播的平面声波，波矢分别为 \mathbf{k}_1 和 \mathbf{k}_2 。

- 同向行波

不妨设两列行波均沿 x 正向传播， $\mathbf{n}_1=\mathbf{n}_2=(1, 0, 0)$ ，

$$p_1 = p_{1a} e^{j(\omega t - kx)}, p_2 = p_{2a} e^{j(\omega t - kx)}, p = p_1 + p_2 = (p_{1a} + p_{2a}) e^{j(\omega t - kx)}$$

合成声场完全等价于声压振幅为 $p_a=p_{1a}+p_{2a}$ 的单列平面行波。在此情形下，仅用标量足以表示有向的声强量如声强。直接从公式(4-9-13)和(4-9-14)得到合成声场的声强为

$$\bar{I} = \frac{1}{2z_0} \left[|p_1|^2 + |p_2|^2 + 2\text{Re}(p_1^* p_2) \right], \quad \bar{\varepsilon} = \frac{\bar{I}}{c_0}$$

设声压幅值 p_{1a} 和 p_{2a} 的相位分别为 $\varphi_1=\arg(p_{1a})$ 和 $\varphi_2=\arg(p_{2a})$ 。干涉的强弱取决于相位差 $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1$ ：

$$\bar{I} = \frac{1}{2z_0} \left(|p_{1a}|^2 + |p_{2a}|^2 + 2|p_{1a}||p_{2a}|\cos\Delta\varphi \right) = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \frac{|p_{1a}||p_{2a}|}{z_0} \cos\Delta\varphi \quad (4-9-15)$$

如果 p_1 和 p_2 的幅度相等, $|p_{1a}|=|p_{2a}|$, 则当 (i) 相位相同 ($\Delta\varphi=0$) 时, 总声强是 p_1 或 p_2 单独存在时的 4 倍, 即所谓的相位增强 (enhancement) 效应;

(ii) 相位相反 ($\Delta\varphi=\pi$) 时, 总声强为零, 即所谓的相位相消效应。需指出, 增强与相消效应其实并无特别之处, 实乃声强与声压幅值的平方关系之故; 前者对应的合成声压 $p_a=2p_{1a}$, 后者对应的 $p_a=0$ 。

• 反向行波

不妨设两列行波沿 x 轴的正负方向传播, $\mathbf{n}_1=(\mathbf{1}, 0, 0)$, $\mathbf{n}_2=(-\mathbf{1}, 0, 0)$ 。公式(4-9-13)和(4-9-14)表明, 干涉项等于零。结果, 总声强和平均声能密度是两列声波单独存在时的声强和平均声能密度之和:

$$\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 = \frac{|p_1|^2 - |p_2|^2}{2z_0}, \left(\bar{I}_1 = \frac{|p_1|^2}{2z_0}, \bar{I}_2 = -\frac{|p_2|^2}{2z_0} \right)$$

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2 = \frac{1}{2}\beta_{s0}(|p_1|^2 + |p_2|^2), \left(\bar{\varepsilon}_i = \frac{1}{2}\beta_{s0}|p_i|^2, i=1,2 \right)$$

所以, 反向传播的两列平面声波是不相干的。虽然如此, 反向声波的叠加可以引起驻波效应:

$$\begin{aligned} p &= p_1 + p_2 = p_{1a}e^{j(\omega t - kx)} + p_{2a}e^{j(\omega t + kx)} \\ &= \left[|p_{1a}|e^{-j(kx - \varphi_1)} + |p_{2a}|e^{j(kx + \varphi_2)} \right] e^{j\omega t} \\ &= e^{\frac{1}{2}j(\varphi_1 + \varphi_2 + \omega t)} \left[2|p_{1a}|\cos\left(kx + \frac{\Delta\varphi}{2}\right) - (|p_{1a}| - |p_{2a}|)e^{j\left(kx + \frac{\Delta\varphi}{2}\right)} \right] \end{aligned}$$

其中第一项表示驻波, 第二项表示行波。如果反向传播的声波幅值相等 $|p_{1a}|=|p_{2a}|$, 则总声强处处为零, 形成纯驻波声场。反向波不相干性之因在于它们是线性独立的, 数学上为波动方程的线性独立解。

Equation Section 10引自：

<http://xlwangnu.blog.163.com/blog/static/190719270201432301839955/>

流體力學引論

南京大學聲學研究所 王新龍

【摘要】流體之聲是流體質點振動形式和能量的傳遞。所以，聲學與流體動力學存在某種程度的相關性。欲精通聲學理論，必先掌握必要的流體力學基本知識和基本理論。無奈在教學實踐中發現，仍有不少學生流體力學知識闕如，一定程度上影響了《聲學基礎》課的學習進程。鑑於此，本文簡介理想流體的流體力學基本理論，以期作為讀者專研聲學的預備。

流體包括氣體和液體，可流動而無固定形狀（除非置於固定形狀的容器之內）。儘管流體由微觀上離散的分子（或原子）組成，但流體力學僅研究流體的宏觀力學現象。所以，流體力學把流體視若宏觀連續的媒質。流體力學的理論分析涉及到流體的體積元概念。所謂體積元，概指宏觀無限小但微觀可包含大量流體分子（原子）者。宏觀無限小意謂體積元內宏觀物理量幾乎是均勻，因此可描述體積元所在空間的“點”的流體狀態。另一方面，這些物理量必須具有統計物理之意義，因此微觀上必須足夠大，以包含大量分子（原子），也即，體積元的尺寸必須遠大於分子的平均自由程。體積元是純空間概念。與之相關但相異的概念是流體的質點。所謂質點（particle），其實也是如此這般的流體體積元，但質點是流體的微實體，具有質量，可視為流體的宏觀『分子』（猶可變形的流體微粒）。無數質點的運動遂構成了流體的運動。

本文僅考察理想流體，即無黏性、無熱導損耗（絕熱）的流體。

第一節 流場描述

三維流體空間中，每個流體質點在每個時刻 t 均有其可觀測的確定位置，用位置矢量 \mathbf{r} 描述。在笛卡爾直角坐標系中， $\mathbf{r}=(x,y,z)$ ，其中 x 、 y 和 z 是 \mathbf{r} 在此坐標系中的三個分量。顯然，某質點的位置矢量 \mathbf{r} 不僅隨時而變，而且取決於其初始時刻 $t = t_0$ 的位置 $\mathbf{R}=(a,b,c)$ ，即 \mathbf{r} 是初始位置 \mathbf{R} 和時間 t 的多元函數，

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{R}, t), \text{ or, } \begin{cases} x = x(a, b, c, t) \\ y = y(a, b, c, t) \\ z = z(a, b, c, t) \end{cases} \quad (4-10-1)$$

流速 \mathbf{v} 是流體質點的運動速度（velocity），定義為質點位置矢量 \mathbf{r} 的時間變化率，

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) = \mathbf{v}(\mathbf{R}, t)$$

在直角坐標系中， $\mathbf{v}=(v_x, v_y, v_z)$ 具有三個分量 $v_x=dx/dt$ ， $v_y=dy/dt$ ， $v_z=dz/dt$ 。與位置矢量 \mathbf{r} 一樣，流速 \mathbf{v} 也是初始位置 \mathbf{R} 和時間 t 的函數。流速描述了流體的運動狀態。除此之外，尚需諸如壓力 P （pressure）、密度 ρ （density）、溫度 T （temperature）等其它物理量，以全面描述流體的狀態。然而，根據熱力學（thermodynamics）理論，一般僅需兩個獨立的熱力學狀態變量即可完全描述流體的熱力學狀態，餘者悉可經狀態方程確定。

上述這種描述中，流體的狀態物理量表為質點初始位置 \mathbf{R} 和時間 t 的函數：

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{R}, t), P = P(\mathbf{R}, t), \rho = \rho(\mathbf{R}, t), (2a) \\ \mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t), P = P(\mathbf{r}, t), \rho = \rho(\mathbf{r}, t), (2b) \end{aligned} \quad (4-10-2)$$

這種描述方法在流體力學中被稱為拉格朗日描述（Lagrange description）。拉格朗日描述視流體的運動為無數質點運動的集合，並試圖“跟踪”（trace）每一個質點的運動軌跡（trajectory）。這種描述體現了機械運動的確定論觀

（determinism），一旦測得某質點在某時刻的位置 \mathbf{R} 及其狀態信息，則該質點在任意時刻 t 的狀態性質盡可通過（2a）獲知。時刻 $t = t_0$ 的位置矢量 \mathbf{R} 不僅作為每個流體質點的『標記』，而且也作為拉格朗日描述體系下的坐標。因 \mathbf{R} 其實是流體質點的初始位置，故在拉格朗日坐標系中狀態量對時間的全導數（full derivatives）等同於時間偏導數（partial derivatives），例如，

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}(\mathbf{R}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{r}(\mathbf{R}, t), \frac{d}{dt} \mathbf{v}(\mathbf{R}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}(\mathbf{R}, t)$$

比諸拉格朗日描述，歐拉描述在流體力學中更常用、更方便。歐拉描述重在當前 t 時刻流體狀態在空間 \mathbf{r} 的分佈，即(4-10-2)。所以，這是一種場（field）——流場——的描述方法。在此描述中，位置矢量 \mathbf{r} 僅被視為與時間完全無關的獨立空間變量。然而，追根溯源，位於 \mathbf{r} 處的流體質點是初始時刻 t_0 從 \mathbf{R} 處遷移而來，即 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{R}, t)$ ，故而上述兩種描述以如下方式關聯：

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}(\mathbf{R}, t) &= \mathbf{v}(\mathbf{r}(\mathbf{R}, t), t) \\
P(\mathbf{R}, t) &= P(\mathbf{r}(\mathbf{R}, t), t) \\
\rho(\mathbf{R}, t) &= \rho(\mathbf{r}(\mathbf{R}, t), t)
\end{aligned}
\tag{4-10-3}$$

因此兩種描述，就有兩種不同意義的狀態變量時間變化率。其一是（被視作流體微粒的）質點的狀態時間變化率，即拉格朗日描述下的時間變化率。它反映了質點本身在其運動過程中的時間變化，質點速度（流速） \mathbf{v} 即為典型。其二是空間某固定點 \mathbf{r} 的時間變化率，即歐拉描述下的時間偏導數，例如

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}(\mathbf{r}, t), \frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{r}, t), \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t)$$

其中，位置矢量 \mathbf{r} 被視為獨立的空間變量，與時間無關。其實，這兩種時間變化率分別是拉格朗日和歐拉描述下狀態量的時間導數。

兩種時間變化率是相互關聯的。觀察公式(4-10-3)便知，**拉格朗日描述下的時間變化率等於歐拉描述下的時間全導數**（專用微分符號 d/dt 表示之）。所以，欲求歐拉描述下的拉格朗日意義下的時間變化率，求時間導數時必須顧及空間變量 $\mathbf{r}=(x,y,z)$ 本身是時間的函數；譬如，

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \rho(\mathbf{r}, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) + \frac{dx}{dt} \frac{\partial}{\partial x} \rho(\mathbf{r}, t) + \frac{dy}{dt} \frac{\partial}{\partial y} \rho(\mathbf{r}, t) + \frac{dz}{dt} \frac{\partial}{\partial z} \rho(\mathbf{r}, t) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho(\mathbf{r}, t) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \rho(\mathbf{r}, t)
\end{aligned}$$

其中，三維梯度算符

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

由此可見，在歐拉描述的時間全導數與偏導數存在如下的微分算符關係

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \tag{4-10-4}$$

等式右端的第一項是空間固定點的導數，稱為本地時間導數（即歐拉描述下的時間變化率），而第二項是流動而產生的時間變化率貢獻，稱為對流導數。

第二節 理想流體運動的基本方程

连续性方程

設 V 是流體空間某任意（但大小形狀固定）的體積，其中所含流體的質量是

$$\iiint_V \rho(\mathbf{r}, t) dx dy dz$$

蓋因流動，流體必經 V 的封閉曲面 S 流入或流出。考察 S 上的某有向面元 $dS = \mathbf{n} dS$ ，其中 \mathbf{n} 是 dS 面元的單位外法向矢量。單位時間內經 dS 流出的流體體積是 $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$ ，故流出的質量是 $\rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$ 。對整個封閉曲面 S 積分，

$$\oiint_S \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$$

就得到單位時間內經封閉表面 S 流出的質量（面積分值为正表示淨流出的流體，為負表示淨流入的）。被積函數 $\rho \mathbf{v}$ 是一個矢量，謂之流體的質量通量密度矢量，其方向與流速 \mathbf{v} 一致，其量值等於單位時間內流經與流速 \mathbf{v} 相垂直的單位面積的流體質量。除了質量通量密度矢量之意外， $\rho \mathbf{v}$ 還具有單位體積流體動量之意（見下文動量守恆部分）。根據質量守恆定律，若體內無流源，則經邊界 S 流出的質量必然導致單位時間內 V 內質量的減少，即

$$\oiint_S \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = - \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dx dy dz$$

等式右端的时间偏導數意謂單位時間內的增長率，而前面取負號則表示減小率。前已假定，體積 V 在空間固定，故右端的时间導數可直接移入體積分號內。進一步對左端的封閉曲面積分應用高斯定理，並合併兩積分，則上式化為如下體積分，

$$\iiint_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right] dx dy dz = 0$$

因體積 V 大小任意，故體積分下的被積函數必等於零，

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, (5a)$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, (5b) \quad (4-10-5)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \rho q(\mathbf{r}, t), (5c)$$

此即質量的連續性方程，通常謂之**連續性方程**（equation of continuity）。可見，連續性方程是質量守恆定律之數學表述。應用眾所周知的散度公式： $\text{div}(\rho \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \text{grad}(\rho) + \rho \text{div}(\mathbf{v})$ ，並把算符公式（4）應用於密度 ρ 的时间導數，則連續性方程也可以寫成如下等價的形式

易把連續性方程（5）推廣到有質量產生源之情形。設單位體積的流體在單位時間內產生的流體質量是 $\rho q(\mathbf{r}, t)$ （ q 是流體的體積生成率），則根據質量守恆定律不難導出

歐拉方程

仍考慮固定形狀大小的流體體積 V 。若無其它外力，則作用在此體積上的外力僅僅是在包圍 V 的封閉曲面 S 上所受的壓力的總和，

$$-\iint_S P d\mathbf{S} = -\iiint_V \nabla P dx dy dz$$

其中的等式已經利用了針對標量的封閉曲面面積分高斯定理。須注意，流體的壓力總與邊界面的外法向相反，垂直界面指向流體內部，故上式取負號。上式的等式表明，單位體積的流體質點受到壓力： $-\text{grad}(P)$ 。而單位體積的流體質點的質量是 ρ ，所以根據牛頓第二定律得到如下運動方程（equation of motion）

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla P \quad (6a)$$

其笛卡尔坐标的分量形式

$$\rho \frac{dv_x}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x}, \quad \rho \frac{dv_y}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial y}, \quad \rho \frac{dv_z}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial z}$$

再次強調，因牛頓定律是針對質點而言的，上式左端的流速導數是質點的加速度，即流速 \mathbf{v} 的時間全數。根據全導數與偏導數的關係（4），運動方程又可表達成

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P \quad (6b)$$

式中流速 \mathbf{v} 的梯度

$$\nabla \mathbf{v} = \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}, \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}, \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \right)$$

是矢量的矢量——張量，具有九個分量。或者，方程（6b）也可以寫成分量的形式，

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla v_x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_y}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla v_y = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial v_z}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla v_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z}$$

此方程由歐拉於 1755 年首次提出，是謂歐拉方程（Euler equation）。

如果單位質量的流體還受到外力 \mathbf{g} 的作用，則歐拉方程（6b）右端尚需加上單位體積的外力 $\rho\mathbf{g}$ 。兩端均除以密度 ρ ，得到

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \mathbf{g} \quad (6c)$$

若所受外力是重力，則 $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$ ，其中 g 是重力加速度， \mathbf{e}_z 指沿水平面垂直向上的單位矢量。

狀態方程

前已闡述，流體的狀態不僅包括運動狀態（ \mathbf{v} ），還包括諸如壓力 P 、密度 ρ 等熱力學狀態量。設單位質量流體（或質點）的熵為 s 。熵 s 可表為壓力 P 和密度 ρ 的狀態函數： $s = s(P, \rho)$ 。絕熱過程不存在熱量交換，故流體的熵守恆，其數學表示為

$$\frac{ds}{dt} = 0 \quad (7a)$$

或根據公式（4），有

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla s = 0 \quad (7b)$$

方程（7a）表明， $s(P, \rho) = \text{常數}$ ，即流體的絕熱過程是**等熵運動**。從中原則上可求得函數關係

$$P = P(\rho) \quad (8)$$

設流體的溫度為 T ，單位質量流體的焓為 h 。根據熱力學的基本關係

$$dh = Tds + \frac{1}{\rho} dP \quad (9)$$

可知，對於等熵運動（ $ds = 0$ ），存在如下關係

$$dh = \frac{1}{\rho} dP \quad \rightarrow \quad \nabla h = \frac{1}{\rho} \nabla P, \quad \left(h = \int \frac{dP}{\rho} \right) \quad (9a)$$

同時，應用矢量分析公式【注 1】，則可把歐拉方程（6b）表達成

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \int \frac{dP}{\rho} \right) = \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) \quad (10)$$

以上導出了歐拉描述下理想流體的連續性方程（5）、歐拉（運動）方程（6），並簡述了熱力學狀態方程（7）。這些方程構成了歐拉描述體系下理想流體的基本方程。至於其拉格朗日描述的形式，參加《[流體運動的拉格朗日描述](#)》一文。

第三節 動量和能量的連續性方程

動量守恒

在連續性方程（5）的兩端乘以速度 \mathbf{v} 的 x 分量 v_x ，再與歐拉方程（6b）的 x 分量相加，得到

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t} + \nabla \cdot [(\rho v_x) \mathbf{v}] = -\frac{\partial P}{\partial x} \quad (11a)$$

為明了此方程的物理意義，特對此方程兩端作被變截面 S 包圍的任意體積 V 的體積分，

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho v_x dx dy dz + \oiint_S \rho v_x (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}) = -\iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz$$

其中等式左端的第二項面積分是利用高斯定理的結果。若應用標量的高斯定理，則等式右端實際上是

$$-\iiint_V \nabla P dx dy dz = -\oiint_S P d\mathbf{S}$$

的 x 方向分量。因此，上列微分方程等價於如下的積分方程，

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho v_x dx dy dz = -\oiint_S \rho v_x (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}) - \left(\oiint_S P d\mathbf{S} \right)_x$$

其中最後一項的括號外的下標表示 x 分量。方程左端的被積函數 ρv_x 乃單位體積的流體動量在 x 方向的投影，而其體積分就是 V 內流體的總動量在 x 方向的分量；右端第一個面積分是單位時間內經封閉曲面 S 流入的 x 方向動量，而第二個壓力面積分是作用在 V 上的 x 方向總壓力分量。因此，上列積分方程正是 x 分量動量守恆定律的積分表述，而方程 (11a) 是 x 方向動量守恆的微分表述。同理，可以得到對應 y 和 z 分量的積分方程。合併三個分量積分方程，得到矢量形式的動量守恆的積分方程表示，

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \mathbf{v} dx dy dz = - \oiint_S \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}) - \oiint_S P d\mathbf{S}$$

方程左端的被積函數 $\rho \mathbf{v}$ 乃單位體積的流體動量，而其體積分就是 V 內流體的總動量；右端第一個面積分是單位時間內經封閉曲面 S 流入的動量，而第二個壓力面積分是作用在 V 上的總壓力。對應的微分形式是

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = -\nabla P \quad (11b)$$

此即**動量的連續性方程**，類似於質量的連續性方程 (5)。張量 $\rho \mathbf{v} \mathbf{v}$ 具有九個分量 ($\rho v_x v_x, \rho v_x v_y, \rho v_x v_z, \dots$)，謂之**動量通量密度張量**，其在速度 \mathbf{v} 方向上的投影 $\rho \mathbf{v} \mathbf{v}$ 即單位時間內流過垂直於 \mathbf{v} 方向上單位面積的動量。有些教課書中，也把

$$\mathbf{M} = P\mathbf{I} + \rho \mathbf{v} \mathbf{v}, \quad (M_{ij} = P\delta_{ij} + \rho v_i v_j, i, j = x, y, z)$$

稱為動量通量密度張量，其中 \mathbf{I} 是單位張量。迺以 \mathbf{M} 表示，則動量連續性方程 (11b) 可表為

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot \mathbf{M} = 0$$

可見，動量連續性方程可從歐拉方程導出；反之，歐拉方程 (6) 也可直接從動量連續性方程 (11b) 反推出。

能量守恆

由於流動，流體不僅具有內能（設單位質量的內能是 e ），還具有動能。單位體積的流體能量——**能量密度**是

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho e, \quad (v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v})$$

其中第一項是動能密度，第二項是內能密度。動能密度的時間變化率

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) &= \frac{1}{2} v^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \\ &= -\frac{1}{2} v^2 \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) - \mathbf{v} \cdot [\nabla P + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}] \\ &= -\frac{1}{2} v^2 \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) - \mathbf{v} \cdot \nabla P - \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \nabla v^2 \\ &= -\frac{1}{2} \nabla \cdot (\rho v^2 \mathbf{v}) - \mathbf{v} \cdot \nabla P \end{aligned}$$

在推導過程中，已利用了連續性方程（5a）和歐拉方程（6b），以及矢量關係【注 1】

$$\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \nabla v^2$$

利用熱力學關係（9），得到

$$\nabla P = \rho (\nabla h - T \nabla s)$$

其中 T 是溫度。所以，

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) &= -\frac{1}{2} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} v^2) - \rho \mathbf{v} \cdot (\nabla h - T \nabla s) \\ &= -\frac{1}{2} v^2 \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) - \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 + h \right) + \rho T \mathbf{v} \cdot \nabla s \end{aligned}$$

再利用熱力學關係，

$$\begin{aligned} de &= T ds - P d \left(\frac{1}{\rho} \right) = T ds + \frac{P}{\rho^2} d\rho \\ d(\rho e) &= e d\rho + \rho de = h d\rho + \rho T ds, \quad \left(h = e + \frac{P}{\rho} \right) \end{aligned}$$

並利用連續性方程（5b）和絕熱方程（7b），得到內能密度的時間變化率

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho e) = h \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho T \frac{\partial s}{\partial t} = -h \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) - \rho T \mathbf{v} \cdot \nabla s$$

綜上，得到能量密度的時間變化率，

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho e \right) = -\nabla \cdot \left[\rho \mathbf{v} \left(\frac{1}{2} v^2 + h \right) \right]$$

利用焓的定義 $h = e + P/\rho$ ，則上列方程可寫為

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho e \right) + \nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho e \right) \mathbf{v} \right] = -\nabla \cdot (P\mathbf{v}) \quad (12a)$$

同理，為明了此微分方程的物理意義，特對此方程作關於固定（但任意的）體積 V 的積分，並應用高斯定理，

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho e \right) dV = -\oiint_S \rho \left(\frac{1}{2} v^2 + e \right) \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} - \oiint_S P\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \quad (12b)$$

等式左端是體積 V 內總能量（體積分）的時間變化率，右端第一項是單位時間內經邊界流入的能量，而第二項則是壓力經邊界 S 對體積 V 所作的功，所以，這是理想流體能量守恆的積分表述，公式（12a）就是能量的連續性方程。所以，**能量通量密度矢量**是（下式第一項的）能流密度矢量與（第二項的）功率流矢量 $\rho \mathbf{v}$ 之和：

$$\rho \left(\frac{1}{2} v^2 + e \right) \mathbf{v} + P\mathbf{v}$$

第四節 環量守恆與勢流

考慮一條由一系列流體質點組成的閉合圍線 L （猶由小珠串成之項鍊）。當流體運動時，圍線的質點也發生移動，圍線的位置和形狀因此而變。考察沿圍線的封閉曲面積分

$$\Gamma = \oint_L \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{r}$$

如何因流動而變化，即計算 $d\Gamma/dt$ 。為避免與時間的微分相混淆，此處特採用 $\delta \mathbf{r}$ 表示圍線上線段微元。稱 Γ 為該圍線的速度環量（circulation）。

顯然，不僅圍線上的速度隨時而變，圍線本身也在變化。所以，

$$\begin{aligned}
 \frac{d\Gamma}{dt} &= \oint_L \frac{d}{dt} (\mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{r}) = \oint_L \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \delta \mathbf{r} + \mathbf{v} \cdot \frac{d\delta \mathbf{r}}{dt} \right) \\
 &= \oint_L \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \delta \mathbf{r} + \mathbf{v} \cdot \delta \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) \right) = \oint_L \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \delta \mathbf{r} + \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} \right) \\
 &= \oint_L \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \delta \mathbf{r} + \frac{1}{2} \oint_L \delta (v^2) \\
 &= \oint_L \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \delta \mathbf{r}, \quad \left(\oint_L \delta (v^2) = 0 \right)
 \end{aligned}$$

注意，由於 $\delta \mathbf{r}$ 實際上是極其相鄰的兩質點位置矢量 \mathbf{r} 之差，故有 $d(\delta \mathbf{r})/dt = \delta(d\mathbf{r}/dt)$ ，即時間微分與空間微分可互易。而倒數第二個等式右端的第二個積分是全微分的封閉曲線積分，故其值等於零。利用歐拉方程（6a），並考慮到絕熱運動滿足（9a），上式遂化為梯度的環路積分。而根據矢量分析理論，其值等於零。如此，遂有 $d\Gamma/dt=0$ ，即環量 Γ 等於與時間無關的常數：

$$\Gamma = \oint_L \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{r} = \text{常數} \quad (13)$$

此即理想流體的**環量守恆定律**，也稱其為 Kelvin 定理。注意，該結論是相對指定圍線而言的；不同的圍線具有不同的 Γ 值。

勢流

假设围线 L 所圍区域是（單或多）**连通**的，則根據 Stokes 環路定理，環量 Γ 可表為如下的面積分，

$$\Gamma = \iint_S \boldsymbol{\Omega} \cdot d\mathbf{S}, \quad (\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{v})$$

其中， \mathbf{S} 是流體內以封閉曲線 L 為界的任意曲面， $\boldsymbol{\Omega}$ 是流速 \mathbf{v} 之旋度。在流體力學中， $\boldsymbol{\Omega}$ 稱為渦量（vortex）。若在整個流體空間 $\boldsymbol{\Omega}=0$ ，則流體之運動稱為**無旋流**（irrotational flow）。反之，若渦量非處處為零，則稱為**有旋流**。由於速度無旋，可引入標量速度勢 Φ ，

$$\mathbf{v} = \nabla \Phi$$

也因而稱無旋流為**勢流**（potential flow）。從公式（13）式可推知，理想流體若其環量

$$\oint_L \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{r} = 0$$

則其流動必為**勢流**。

流線（streamlines）是流體力學的基本概念之一。此乃與流速 \mathbf{v} 相切的空間曲線，滿足方程

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}$$

對於定常（stationary）流， $\partial \mathbf{v} / \partial t = 0$ ，流場分佈不變，流線亦不變，與其上質點的軌跡重合（否則不然）。無論如何（定常或非定常），沿流線的速度線積分

$$\int \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{r} = \int v \delta r \neq 0$$

由此推斷，**勢流中不可能存在閉合的流線**（否則，沿閉合流線的環路積分一般不為零，與勢流假設相矛盾）。反之，在有旋運動中，有可能存在閉合的流線。

對於勢流，用 $\mathbf{v} = \text{grad}(\Phi)$ 代入歐拉方程（10），並對空間積分，則立即得到

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 + \int \frac{dP}{\rho} = \varphi(t) \quad (14)$$

其中的空間積分常數 φ 與時間有關。其實，若作變換，

$$\Phi = \Phi_1 + \int \varphi(t) dt$$

則在 Φ_1 滿足的方程中， $\varphi=0$ ，而 Φ_1 與 Φ 是物理上等價的，即 $\text{grad}(\Phi_1) = \text{grad}(\Phi)$ 。是以，不妨迳取 $\varphi=0$ 而不失一般性。

對於定常流動，狀態量皆與時間無關，我們自然也要求速度勢 Φ 不顯含時間，即 $\Phi = \Phi(\mathbf{r})$ 。方程（14）遂化為有關於勢流的伯努利方程：

$$v^2 + \int \frac{dP}{\rho} = \text{與時間無關的常數} \quad (15)$$

等式右端的常數不僅與時間無關，也與空間無關。

對於一般的定常流（不一定是勢流），流速 $\mathbf{v}=\mathbf{v}(\mathbf{r})$ 不顯含時間，流線在空間仍固定。在方程（10）的兩端點乘速度 \mathbf{v} ，遂有

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(v^2 + \int \frac{dP}{\rho} \right) = 0$$

其中的偏導數是沿流線的方向導數。結果沿流線恒有如下定常流的伯努利方程，

$$v^2 + \int \frac{dP}{\rho} = \text{與流線有關的常數} \quad (16)$$

顯然，對於非勢的定常流，右端的積分常數雖與時間無關，但與流線有關（不同的流線有不同的值）。

第五節 不可壓縮流體

水比諸空氣簡直不可壓縮，長波長流體波動（如普通波浪）尤然。換言之，在某種近似下水等液體可視為不可壓縮（incompressible）流體，其密度 ρ 是常數。根據連續性方程（15b），對於不可壓縮流體，

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (17)$$

意謂任意時間間隔內流入任意体积 V 的流体质量（体积）比等于流出的。不可壓縮流體的歐拉方程可大大簡化。不失一般性，以下考慮受重力場作用的流體（如水），其單位體積受重力 $\mathbf{f}=\rho\mathbf{g}$ （ \mathbf{g} 是重力加速度矢量，量值為重力加速度 g ，方向垂直向下；若无重力，迺取 $\mathbf{g}=0$ ）的作用。對於勢流， $\mathbf{v}=\text{grad}(\Phi)$ ，則對應於方程（14）和（17），不可壓縮流體滿足如下形式的伯努利方程方程和拉普拉斯方程

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 + \frac{P}{\rho} + gz = \varphi(t)$$

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (15)$$

a)

此處的 φ 僅與時間有關（無關乎流線）。

對於不可壓縮的非勢流，情形稍微不同。由於不可壓縮（ ρ 是常數），歐拉方程（6c）可簡化為

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla \left(\frac{P}{\rho} \right) + \mathbf{g}$$

或者，利用矢量關係【注 1】

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{v} = -\nabla \left(\frac{P}{\rho} \right) + \mathbf{g}$$

設 l 是沿流線的單位矢量，用 l 點積方程兩端，並注意 l 方向即流速 \mathbf{v} 的方向，與速度旋度相關項的點積等於零，則有

$$\frac{\partial v_l}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \frac{P}{\rho} \right) = \mathbf{g} \cdot l$$

其中 v_l 是速度在流線方向的投影。對方程沿流線積分，

$$\int \frac{\partial v_l}{\partial t} dl + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \frac{P}{\rho} = -gz + \text{constant}$$

對於定常流，上式左端第一項等於零。所以，（對應於（16）的）不可壓縮流體的定常流所滿足的伯努利方程

$$v^2 + \frac{P}{\rho} + gz = \text{與流線有關的常數}$$

其中的 z 是垂直向上的坐標【2】。可見，在處於一水平面的流線上（ z 相同），定常流的流速越大，壓力 P 越小。設若存在終止於物體邊界的流線，則在終止點速度為零，壓力最大；諸如此類的流點稱為駐點。

二维不可压缩势流，流函数

在二維的情形下，因流速 $\mathbf{v}=(v_x, v_y)$ 滿足方程（17），即

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\partial v_y}{\partial y}$$

所以，流速分量可以表為某個標量函數 $\psi(x, y)$ 的導數：

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

稱 $\psi(x, y)$ 為**流函數**。而二維流線的方程可表為

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} \rightarrow v_y dx - v_x dy = 0$$

利用流函數，在流線上此方程可進一步表為

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = d\psi = 0$$

此表明，在流線上流函數 $\psi(x, y) = \text{常數}$ 。不同的常數值給出不同的流線。是以，流函數可標記流線，流線是流函數作為參數的曲線族簇。

用流函數可以方便地計算二維流量。在二維空間中，經過兩點 A、B 的流量 Q 是

$$\begin{aligned} Q &= \int_A^B \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \rho \int_A^B (v_x dy - v_y dx) = \rho \int_A^B d\psi \\ &= \rho (\psi|_B - \psi|_A) \end{aligned}$$

所以，只要給出 A、B 兩點的流函數值，就可極其方便地算出其間的流量 Q。

第六節 水表面波

液-液或液-氣之交界面因擾動而產生波動，形成沿界面傳播的界面波

(interfacial waves)。液-氣表面的界面波通稱表面波 (surface waves)。很多數情形下這類波動乃重力使然，故又稱其為重力波 (gravity waves)。日常所見的水波 (water waves) 即最常見的重力波【注 3】。顧名思義，表面波發生在表面及其附近；離表面越深，波幅越小，以致察覺不到。故而，儘管海面波浪滔天，深海之下或寧靜安詳。

此處僅考慮重力場中的不可壓縮勢流問題，並設 (x, y) 平面為靜止的水表面，而 z 坐標軸垂直向上。在此問題中，速度勢 Φ 滿足方程 (15a)。不妨令其中的積分常數 $\varphi=0$ ，則方程 (15a) 的第一式得到

$$P = -\rho \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 + gz \right)$$

在水-氣界面 $z=\zeta(x,y,t)$ 上壓力連續，所以水壓 P 等於氣壓 P_0 。因 P_0 也可以

『吸收』進食勢函數 Φ 中，故而得到所謂的**動力學邊界條件**：

$$g\zeta + \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 = 0, \quad (z = \zeta) \quad (18a)$$

邊界的垂直振速是

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta}{dt} &= \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{dx}{dt} \Big|_{z=\zeta} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{dy}{dt} \Big|_{z=\zeta} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} v_x \Big|_{z=\zeta} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} v_y \Big|_{z=\zeta} \\ &= \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{z=\zeta} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big|_{z=\zeta}, \quad \left(v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

此振速必須等於流速 \mathbf{v} 的垂直分量在表面的取值，所以得到所謂的**運動學邊界條件**：

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad (z = \zeta) \quad (18b)$$

可見，雖然速度勢滿足的拉普拉斯方程是線性的，但兩個邊界方程 (18) 皆非線性。故一般而言，水表面波是非線性的。

在小振幅情形下，邊界方程可以線性化，如此獲取小振幅線性表面波。所謂小振幅，意指水的質點振動速度（流速） \mathbf{v} 如此之小，以致歐拉方程 (6c) 等式左端第二項的對流導數（二次非線性項）相比於第一項的本地時間導數而言可忽略不計【注 4】，方程 (6c) 遂可近似為

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \approx -\nabla P - \rho \mathbf{g}$$

因重力場無旋（ $\text{rot}(\mathbf{g}) = 0$ ），故對上列線性化方程作旋度運算，則有

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{v} \approx 0 \quad \rightarrow \quad \nabla \times \mathbf{v} = \text{常數}$$

若初始水面靜止，則上述常數恆為零，即速度旋度近似等於零。所以，對於小振幅表面波，勢流假設自然成立。

在小振幅假設下，不但邊界方程（18a）中的非線性項可以忽略，而且，

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{z=\zeta(x,y,t)} &= \frac{\partial}{\partial t} \Phi(x,y,0,t) + \frac{\partial^2}{\partial t \partial z} \Phi(x,y,0,t) \zeta + \dots \\ &\approx \frac{\partial}{\partial t} \Phi(x,y,0,t)\end{aligned}$$

所以，動力學邊界條件可線性化為

$$g\zeta(x,y,t) + \frac{\partial}{\partial t} \Phi(x,y,0,t) \approx 0 \quad (19a)$$

而在邊界方程（18b）中，

$$\begin{aligned}v_z \Big|_{z=\zeta} &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=\zeta} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=0} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \Big|_{z=0} \zeta + \dots \\ &\approx \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=0}\end{aligned}$$

結果，得到線性化的運動學邊界條件

$$\frac{\partial}{\partial z} \Phi(x,y,z,t) \Big|_{z=0} = \frac{\partial}{\partial t} \zeta(x,y,t) \quad (19b)$$

在（19a）和（19b）中消去 ζ ，則得到速度勢 Φ 在水表面所必須滿足的邊界條件

$$\left(g \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right) \Big|_{z=0} = 0 \quad (20a)$$

若水有限深，深度 d ，水底是剛性平面，則在 $z=-d$ 處流體的法向速度 $v_z=0$ 。如此，尚有底部邊界條件

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=-d} = 0 \quad (20b)$$

容易驗證，滿足如此底部邊界條件的拉普拉斯方程速度勢解具有如下形式

$$\Phi(x, y, z, t) = \phi(x, y, t) \frac{\cosh(kz + kd)}{\cosh kd} \quad (21)$$

其中，函數 $\phi(x, y, t)$ 滿足兩維 Helmholtz 方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2 \right) \phi(x, y, t) = 0 \quad (22a)$$

其中 k 是任意常數（其實是表面波的波數）。再把形式解代入表面邊界條件

(20a)，則 $\phi(x, y, t)$ 必須滿足

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \omega^2 \phi = 0 \quad (22b)$$

其中，

$$\omega^2 = kg \tanh kd \quad (23)$$

因此，求解線性水表面波問題轉化為求解方程 (22)。

方程 (22b) 是簡諧振子的振動方程，振動頻率為 ω 。它獨立地給出了速度勢與時間的依賴關係。而速度勢與 (x, y) 平面空間的依賴關係取決於二維 Helmholtz 方程 (22a)，與薄膜振動解完全一致。為簡單起見，下面僅考慮一維解（如窄水槽中的情形）。滿足 (22) 的一維行波解是

$$\phi(x, t) = \Phi_0 \cos(\omega t - kx)$$

或者，代入 (21)，

$$\Phi(x, z, t) = \Phi_0 \frac{\cosh(kz + kd)}{\cosh kd} \cos(\omega t - kx) \quad (24)$$

此乃沿 x 方向傳播的簡諧行波，波數 k ，頻率 ω 。顯然，在深度方向上，此行波解是指數衰減的。

公式 (23) 給出了水表面波的頻散關係。從中可見，表面波的波速 $c=\omega/k$ 嚴重地依賴於頻率。所以，水波是高度頻散的波動。只有在淺水波 ($kd\rightarrow 0$) 的情形下，

$$\omega^2 \approx k^2 g d, \quad c = \frac{\omega}{k} \approx \sqrt{g d}$$

波速 c 才幾乎與頻率無關。相反，在深水波 ($kd\rightarrow \infty$) 的情形下，

$$\omega^2 \approx k g, \quad c = \frac{\omega}{k} \approx \frac{g}{\omega}$$

頻散非常嚴重；頻率越低，波速越大；反之，高頻表面傳播很慢。這與實際觀察完全一致。

註釋

【注 1】矢量公式

$$\frac{1}{2} \nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$$

等式兩端點積流速 \mathbf{v} ，並考慮到 $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{A}) = 0$ (\mathbf{A} 任意)，遂有

$$\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \nabla v^2 = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$$

其中 $v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ 。

【注 2】從伯努利方程可知，定常流的壓力的變化 $\Delta P \propto \rho v^2$ ，而密度的變化 $\Delta \rho \propto \Delta P / c^2$ (其中 c 是聲速)，固有 $\Delta \rho / \rho = O(v/c)^2$ 。可見，之邀流速 $v \ll c$ 時，則 $\Delta \rho$ 的變化可忽略，流体可視為不可壓縮的。

【注 3】如果波長很短，則水面的張力起重要作用。在極端的波長，表明張力起支配地位，所形成的表面波乃表明張力波。

【注 4】設質點振動的幅度是 a ，週期 T ，波長 λ ，則速度 $v=O(a/T)$ ，則速度 v 的本地時間導數是 $O(v/T)$ ，而空間導數是 $O(v/\lambda)$ 。欲使速度的對流導數項遠小於本地導數項，必須

$$\frac{1}{\lambda} \left(\frac{a}{T} \right)^2 \ll \frac{a}{T} \frac{1}{T} \quad \rightarrow \quad a \ll \lambda$$

即波幅遠小於波長。

第五章 声波在管中的传播

引自: <http://xlwangnu.blog.163.com/blog/static/190719270201211112245273/>

管龠之聲

Sound generated by pipes

南京大學聲學研究所 王新龍

管可导声，亦可发声。以管作声，由来尚矣。先民以骨制管作乐，已为考古证实。传说轩辕黄帝命伶伦制律，伶伦截竹为管，吹而有凤鸣鸟声，遂制十二律。本文概述管内声学原理，其模型是一端激励、一端或闭或开的均匀直管。实际发声管（如管乐器）或多或少偏离此基本模型，然究其发声大要，不外乎管内声共振矣。

管内声场

设有横截面积为 S 、长为 l 的直管，管口 ($x=0$) 有声源向管内激励声场。声源有多种形式，如气流激荡、或簧片振动等等。管末端 ($x=l$) 或闭或开，但无论如何皆可用末端声阻抗 Z_{al} 描述之。假定声源工作在低频状态，所激发声波波长 λ 远大于管横截面尺寸（如直径 d ），故而管中所激励的可传播声波是平面波，声压和速度可表示为

$$\begin{aligned} p &= p_{ia} \left(e^{jk(l-x)} + r_p e^{-jk(l-x)} \right) \\ \rho_0 c_0 v &= -\frac{1}{jk} \frac{\partial p}{\partial x} = p_{ia} \left(e^{jk(l-x)} - r_p e^{-jk(l-x)} \right) \end{aligned} \quad (5-1-1)$$

式中， $\rho_0 c_0$ 为管内空气的声特性阻抗率， r_p 是管末端的声压反射系数， p_{ia} 是特定的任意常数（有入射声压振幅之意），其值取决于声源。此处，我们略去简谐因子【注 1】，而指数的坐标取 $x-l$ 纯粹是为运算简便而已。反射系数 r_p 可以写成指数的形式：

$$r_p = e^{-2(\alpha + j\theta)} \quad (2)$$

其中 2θ 是反射系数的相位，而 2α 是反射系数幅度 $|r_p|$ 的指数。将此形式代入 (1a)，略作简化，得到用三角函数表示的声场表达式：

$$\begin{cases} p = p_a \cosh[\alpha + j\theta + jk(l-x)] = p_a \cos[k(l-x) + \theta - j\alpha] \\ v = v_a \sinh[\alpha + j\theta + jk(l-x)] = jv_a \sin[k(l-x) + \theta - j\alpha] \end{cases}$$

$$\left(p_a \equiv 2p_{ia} e^{-\alpha - j\theta}, v_a = \frac{p_a}{\rho_0 c_0} \right) \quad (1b)$$

式中用新声压常数 p_a 取代入射声压振幅 p_{ia} 。根据表达式 (1b)，管中任意位置的声阻抗率和对应的声阻抗分别可表为

$$\begin{cases} z_s(x) = \frac{P}{v} \Big|_{x=l} = \rho_0 c_0 \coth[\alpha + j\theta + jk(l-x)] \\ Z_a(x) = \frac{z_s(x)}{S} = R_0 \coth[\alpha + j\theta + jk(l-x)] \end{cases}, \quad (0 < x < l) \quad (3)$$

其中, $R_0 = \rho_0 c_0 / S$ 为管的参考声阻【注 2】。此公式建立了管内声阻抗(率)的普遍联系, 由此可得到声阻抗(率)的转移公式: 已知某处的声阻抗(率), 可知管内任意位置的。本问题的末端声阻抗 Z_{al} 已知。根据界面两侧声阻抗的连续性【注 3】, $Z_a(l) = Z_{al}$ 。稍加整理, 得到根据末端声阻抗 Z_{al} 求解系数 α 和 θ 的阻抗方程

$$\coth(\alpha + j\theta) = \zeta_a, \quad \text{或者, } \tanh(\alpha + j\theta) = \eta_a$$

$$\left(\zeta_a \equiv \frac{Z_{al}}{R_0}, \quad \eta_a \equiv \frac{1}{\zeta_a} \right) \quad (4)$$

式中 R_0 是管中参考声阻抗【注 4】, 方程右端之比值 ζ_a 是末端的声阻抗比, 而 η_a 是末端的声导纳比, 为 ζ_a 之倒数。把所求得的 α 和 θ 直接代入公式(2), 得到反射系数与末端声导纳比之关系; 代入公式(3), 得到任意位置 ($0 < x < l$) 的声阻抗(率)。

欲求公式(1b)的待定声压系数 p_a 或速度系数 v_a , 需要入口端 ($x=0$) 的激励边界条件。设管入口是面积 S_0 、表面振速幅度 u_a 的活塞声源。在长波近似下, 活塞辐射表面处体积流连续: $Sv|_{x=0} = S_0 u_a$, 如此根据已知的 u_a 得到 p_a 和 v_a :

$$p_a = \rho_0 c_0 v_a, \quad v_a = \frac{S_0}{S} \times \frac{u_a}{\sinh(\alpha + j\theta + jkl)} \quad (5)$$

对于恒振速活塞 (u_a 是给定的常数), 问题之求解至此完成。下面举例说明恒振速情形下的管内共振。

• 闭管

对于刚性末端, $\zeta_a = \infty$ 或 $\eta_a = 0$, 声管为一端封闭的管, 一般称闭管。由阻抗方程(4)立即得

$$\alpha = 0, \quad \theta = 0$$

由公式(2)知, 反射系数 $r_p = 1$ 。由公式(3)求得入口 ($x=0$) 的声阻抗 Z_{a0} 为

$$Z_{a0} = Z_a(0) = -jR_0 \cot(kl) \quad (6)$$

可见, 闭管入口处的声阻抗是一个纯抗, 可正(声质量抗)可负(声顺抗)。若 $l \ll \lambda$ ($kl \ll 1$), 上式可近似为

$$Z_{a0} \approx \frac{\rho_0 c_0}{jSk l} = \frac{1}{j\omega C_a}, \quad \left(C_a = \frac{Sl}{\rho_0 c_0^2} \right)$$

即短管近乎声容为 C_a 的集总参数声学腔体。

非短管 ($kl > 1$) 的闭管会发生截然相反的共振态。其一是 $\text{Im}(Z_{a0}) = 0$, 即 $\cot(kl) = 0$, $kl = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, \dots$, 对应的共振频率

$$\omega_n = n\omega_1, \quad \left(\omega_1 = \frac{\pi c_0}{2l}, n = 1, 3, 5, \dots \right) \quad (7)$$

它们是基频 ω_0 的奇数倍。在此状态下, 管口声压 $p=0$, 管入口相当于“短路”。反之, 若 $\tan(kl) = 0$, 则 $\text{Im}(Z_{a0}) = \infty$ 。正如公式 (5) 所表明的, 闭管自身处于共振状态下, 管内声压和速度振幅趋于无穷。

闭风琴管是一个闭管, 在其“开”口 $x=0$ 处有空气喷入而激励管内声场。如果气流速度与唇形恰当, 会在管入口形成气流激荡。若激荡频率等于闭管的基音频率 ω_1 , 则管子共振发出频率为 ω_0 的基音。

• 开管

称为开管的声管末端存在面积 σ 的收缩形 ($\sigma < S$) 小开口 (此处设为圆形, 半径 a)。此小开口当向管外空间辐射声波。如果末端开口边缘装有法兰 (flange), 则近乎镶嵌在无限大障板上的无质量活塞 (massless piston) 【注 5】, 其辐射力阻抗为

$$Z_r|_{x=l} = \rho_0 c_0 \sigma \left[R_1(2ka) + jX_1(ka) \right], \quad (\sigma = \pi a^2 \leq S) \quad (8)$$

或者, 转换为末端的声阻抗 Z_{al} 为

$$Z_{al} = \frac{Z_r|_{x=l}}{\sigma^2} = \frac{\rho_0 c_0}{\sigma} \left[R_1(2ka) + jX_1(ka) \right] \quad (9a)$$

其中 R_1 和 X_1 分别是活塞的阻函数和抗函数【注 6】。故而, 末端的声阻抗比或声导纳比为

$$\zeta_a = \frac{1}{\eta_a} = \frac{Z_{al}}{R_0} = \frac{S}{\sigma} \left[R_1(2ka) + jX_1(2ka) \right] \quad (9b)$$

显见, 末端开口的收缩 ($\sigma < S$) 可放大末端声阻抗 Z_{al} 。

高频 (或粗管, $ka > 1$) 时, $R_1 \approx 1$, $X_1 \approx 0$, $Z_{al} \approx \rho_0 c_0 / \sigma$ ($\zeta_a \approx S / \sigma \geq 1$)。所以, 高频声在管末端的反射主要是因开口收缩之故。无收缩 ($\sigma = S$) 管的声波几无反射地向外辐射。诚然, 收缩开口会使高频声波在末端开口附近的管内产生高次简正模式, 从而使附近声场复杂化, 上列 Z_{al} 公式也因此须计入高次模式的修正。

相反，在低频 ($ka < 1/2$) 的情形下，障板活塞辐射声阻抗 Z_{al} 公式适用，且可近似为

$$Z_{al} \approx \frac{\rho_0 c_0}{\sigma} \left(\frac{1}{2} k^2 a^2 + jk \frac{8a}{3\pi} \right) \approx jk \frac{\rho_0 c_0}{\sigma} \frac{8a}{3\pi} = jR_0 k \Delta l, \quad (ka \ll 1) \quad (10a)$$

式中，具有长度量纲的 Δl 定义为

$$\Delta l = \frac{8a}{3\pi} \frac{S}{\sigma}$$

可见，低频末端声抗 $\text{Im}(Z_{al})$ 很小，辐射声阻 $\text{Re}(Z_{al})$ 更小，末端声阻抗 Z_{al} 近乎纯抗。故而，

$$\eta_a \approx \frac{1}{jk \Delta l}, \quad (ka \ll 1) \quad (10b)$$

在此近似下，方程 (4) 的解是

$$\alpha \approx 0, \quad \theta \approx \frac{\pi}{2} + k \Delta l$$

代入公式 (2) 知，反射系数幅值 $|r_p| \approx 1$ 。代入公式 (3)，得到管入口 ($x=0$) 声阻抗的近似

$$Z_{a0} \approx jR_0 \tan(kl_e), \quad (l_e = l + \Delta l) \quad (11)$$

式中， l_e 是有效管长。所以， Δl 实质因管末端开口声辐射而引起的管长修正。若 $\sigma=S$ ，则该修正量 Δl 就是熟知的亥姆霍兹共鸣器喉管的修正量。显然，当 $\tan(kl_e)=0$ ，声管输入声阻抗 $Z_{a0} \approx 0$ ，输入能量被共振地吸收而从末端开口辐射出去，共振频率为

$$\omega_n \approx \frac{n\pi c_0}{l_e}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

长笛是开管。吹奏者通过入口吹进气流，使管内声波发生共振，从而激发笛音。通过改变有效长度 l_e ，就可以改变吹奏的音调。

• 关于侧孔

一般管乐器之管壁有规则排列的小孔，其开与闭可以有效地改变有效长度 l_e 。设壁孔位于 $x=l_1$ 处，到末端的距离是 $l-l_1$ 。在 $x=l_1$ 处存在两个声阻抗。其一是旁孔的辐射声阻抗 Z_{ab} ，可用公式 (9) 近似，惟其中的 σ 须用旁孔截面积 σ_b 取代。其二是此侧孔到末端这段声管的在 $x=l_1$ 处的有效声阻抗，可用转移公式 (3) 求得，例如，闭管的公式 (6)，或开管的公式 (11)，惟其中的 l 用 $l-l_1$ 取代而已。两个声阻抗是并联的，其合作之果相当于改变了有效长度 l_e ，并因此改变管的共振特性。视此并联声阻抗为管末端声阻抗 Z_{a1} ，问题辄化为管长为 l_1 的新问题，理论分析一切照旧。

管内声场与激励源的耦合

激励管内空气的是簧片、喷气、吹奏者的嘴唇或类似的机械振动装置。人的声门就是一个精巧的振动激励装置，从声门至口唇之间是截面可变的声管；肺部气流激励声门振动，再经此管道而通过作为管末端的口唇发声。口唇的张合，咽口腔的收缩与扩张，无不改变管道的共振特性，遂有人类高昂低沉、抑扬顿挫之音。管内空气的声振荡又反作用于作为激励源的激励（策动）振子，改变振子的振动，甚至使其同步于声管的特征频率（基音或某些泛音）而振动。激励振子与管内声场的耦合一般十分强烈，甚至是非线性的。笛子、风琴管和喇叭等莫不如此。在此情形下，所发的声调取决于激励源的调谐（选取声管的哪个谐音）和声管的有效长度。至于歌声，人的声带作为激励源，其基频一般低于口腔（作为声管）基频，因此其间的耦合相对较弱。故而，歌声的基频主要取决于声带，而咽喉与口腔共振“管”则成多或少地被调节到声带的某谐音上。

很多情形下，可以把激励源简化为机械振动系统。作为机械振动系统，激励源本身有力阻抗 $Z_m=R_m+jX_m$ ，所辐射声场的反作用作为系统的负载。管内声场与激励振动的耦合是**力声耦合**。最简单的激励振子莫过于与管截面垂直的平面活塞，有效辐射表面积 $S_0 \leq S$ 。假设活塞工作于低频，声管高次模式尽可忽略。根据公式（3），管内声场在活塞声源表面（ $x=0$ ）处的声阻抗为 $Z_a(0)$ 。设活塞的辐射力阻抗是 $Z_r|_{x=0}$ ，与之等效的声阻抗是 $Z_r|_{x=0}/S_0^2$ 。由于活塞工作于低频，在 $x=0$ 处只要满足声阻抗连续的边界条件。故此等效声阻抗必等于声场在 $x=0$ 处的声阻抗 $Z_a(0)$ 。因此，得到辐射力阻抗 $Z_r|_{x=0}$ 的表式：

$$Z_r|_{x=0} = \frac{S_0^2}{S} Z_s(0) = -j \left(\frac{S_0}{S} \right)^2 \rho_0 c_0 S \cot(kl + \theta - j\alpha) \quad (12)$$

它体现为活塞声源的负载，实部反映声管的辐射能力，虚部反映声能在管内的储存容量。

在声源等效线路中【注7】，活塞本身的阻抗 Z_m 串接负载力阻抗 Z_r ，振动系统的总机械（力）阻抗 $Z=Z_m+Z_r$ ，

$$\frac{Z}{\rho_0 c_0 S} = r_m + jx_m - j \left(\frac{S_0}{S} \right)^2 \cot(kl + \theta - j\alpha) \quad (13)$$

式中， $\rho_0 c_0 S$ 是参考辐射力阻抗【注8】， r_m 和 x_m 分别是 R_m 和 X_m 相对此参考力阻抗之比值：

$$r_m = \frac{R_m}{\rho_0 c_0 S}, \quad x_m = \frac{X_m}{\rho_0 c_0 S}$$

若活塞的驱动力振幅为 F_a ，则活塞振速幅值

$$u_a = \frac{F_a}{Z} = \frac{F_a}{Z_m + Z_r} = \frac{F_a / \rho_0 c_0 S}{r_m + jx_m - j \left(\frac{S_0}{S} \right)^2 \cot(kl + \theta - j\alpha)}$$

$$\left(r_m = \frac{R_m}{\rho_0 c_0 S}, x_m = \frac{X_m}{\rho_0 c_0 S} \right) \quad (14)$$

把此 u_a 代入公式 (5)，得到耦合情形下声压振幅的解析式。

共振发生在系统总的力抗 $\text{Im}(Z) = 0$ 。不难验证，共振频率 $\omega = kc_0$ 满足方程

$$\left(\frac{S_0}{S} \right)^2 \cot(kl + \theta) = x_m \left[1 + \frac{\sinh^2 \alpha}{\sin^2(kl + \theta)} \right], \quad \left(k = \frac{\omega}{c_0} \right) \quad (15)$$

恒振速活塞相当于活塞本身的力抗 $x_m \rightarrow \infty$ 。在此极限下，声场对声源之反作用微乎其微。结果，频率方程退化简单的 $\tan(kl + \theta) = 0$ 。对刚性闭管 ($\alpha = 0, \theta = 0$) 的情形下，上式也可简化为

$$\cot kl = x_m \left(\frac{S}{S_0} \right)^2$$

可见，声源的有限质量抗 ($|X_m| < \infty$) 显著改变了声管的共振特性，或者，声场负载改变了声源的共振特性。

管口的共振辐射

设管入口 ($x = 0$) 无激励源，但有外来声波入射其上激励管内声场；反过来，管内被激发的声场又通过此管口向外 (二次) 辐射声波。此本质上属于管口的声散射问题。为简单起见，假设管口 (如水瓶口) 圆形收缩，横截面积 $S_0 < S$ ，半径 a (非前述末端开口半径) $\ll \lambda$ ，边缘存在远大于波长 λ 的法兰，可视为无限大障板。如是则管入口可按无限大障板上的无质量活塞对待。它在入射波的激励下振动，再向外辐射声波。此时，管口总力阻抗 Z 是管内声场作为负载的等效力阻抗与管口的辐射力阻抗的串联。前者由公式 (12) 给出，后者为公式 (8) 的低频近似。结果，

$$\frac{Z}{\rho_0 c_0 S_0} = \frac{1}{2} (ka)^2 + j \frac{8ka}{3\pi} - j \frac{S_0}{S} \cot(kl + \theta - j\alpha)$$

共振发生在 $\text{Im}(Z) = 0$ 。为说明起见，假设管末端刚性封闭， $\alpha = 0, \theta = 0$ 。由 $\text{Im}(Z) = 0$ 得到的共振频率方程可简化为

$$\cot kl = k\Delta l', \quad \left(\Delta l' \equiv \frac{S}{S_0} \frac{8a}{3\pi} \right)$$

注意，此 $\Delta l'$ 与前 Δl 不同。此方程在 $k\Delta l' \ll 1$ 条件下等价于

$$\cot k(l + \Delta l') \approx 0$$

可见，进口的辐射效应相当于管长增加了 $k\Delta l'$ ，公式 (7) 给出的闭管共振频率也因此而修正；例如，基音的频率 ω_1 近似为

$$\omega_1 \approx \omega_1 \left(1 + \frac{\Delta l'}{l} \right)^{-1} \approx \omega_1 \left(1 - \frac{\Delta l'}{l} \right), \quad (\Delta l' \ll l)$$

比无管口辐射的闭管基音频率 ω_1 略有降低。

【注 1】 在线性声学范畴，时间简谐因子 $\exp(j\omega t)$ 是公因子，一般可以不书写，但读者须记住该因子的存在。

【注 2】 R_0 是管中正向传播声波的声阻抗，为纯阻。

【注 3】 声阻抗是声压 p 与声体积流 U 之比值： p/U 。在界面上，声压连续，声体积流连续，故声阻抗连续。

【注 4】 此参考声阻是管中单向（正向）平面波的声阻抗。

【注 5】 在无限大障板活塞辐射理论中，并非要求辐射面是一个实体活塞。

【注 6】 R_1 和 X_1 由柱函数构成，例如， $R_1(x)=1-2J_1(x)/x$ ，其中 $J_1(x)$ 是贝塞尔函数。参见有关教材。

【注 7】 对于声源振动系统而言，活塞的振动速度类比“电流”既“穿越”自身的声阻抗 Z_m ，也“穿越”管内声媒质的负载阻抗 $z_s S$ 。故而， Z_m 和 $z_s S$ 是“串联”的。

【注 8】 活塞面积 $S_0=S$ 、而末端无穷远 ($l=\infty$) 的辐射力阻抗。

引自: <http://xlwangnu.blog.163.com/blog/static/1907192702011101415144476/>

缓变截面管内的声传播

Sound propagation in ducts of slowly varying cross section

南京大學聲學所 王新龍

连续变截面管中声波理论，即是理解各类管道声现象之基础，又关乎扬声、换能和乐器等声学器件之设计。诚然，比之直管甚至突变截面管，即使满足长波近似，变截面管声传播问题也仍然要复杂得多。不过，若截面满足缓变之假设，则管内声场可按准平面波近似，相关数学分析大为简化。本文阐述缓变截面管内声传播的基本理论，着重探讨准平面波近似的条件，及其有关数学分析方法与技巧。

设管道横截面 S 是轴向坐标 x 的连续函数 $S(x)$ 。因截面连续可变，管壁切向不再与 x 轴平行，切角连续可变，遂使与管壁垂直的波阵面呈曲面状【注 1】，不再与横截面 S 重合，面积 $\sigma(x)$ 也连续可变但 $\sigma(x) \neq S(x)$ ，如图一所示。而且，管内轴向传播声波的声场可能有横向分布，不再一维。唯若截面 S 缓变，且波长远大于横截面线度，管内声场近乎一维（准一维，quasi-one dimensional），波阵面 σ 上声学量处处相等。如此，看似复杂的问题仍可约化为一维声波传播问题。

何谓缓变？

如下图所示的连续变截面管中，管道横截面积和声波波阵面面积皆为管轴向坐标 x 的函数：

$$S = S(x), \sigma = \sigma(x) \quad (5-2-1)$$

因波阵面与管壁正交（壁上法向速度零），波阵面的面积

$$\sigma = \iint_{\sigma} d\sigma = \iint_{\sigma} \frac{dS}{\cos \varphi} < \iint_{\sigma} \frac{dS}{\cos \varphi_w} = \frac{S}{\cos \varphi_w}$$

其中 φ 为波阵面法向与管轴之夹角， φ_w 为管壁的切角（ $\varphi < \varphi_w$ ）【注 2】。缓变指横截面线度是 x 的缓慢变化的函数，所以

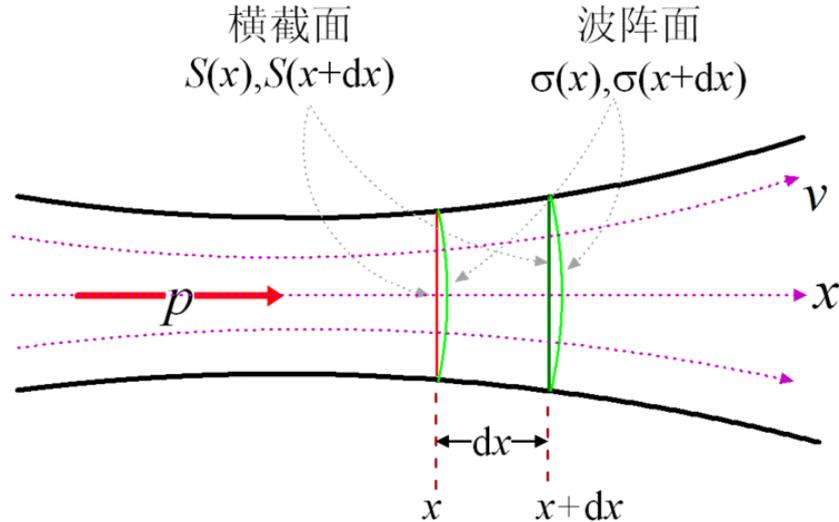
$$\tan \varphi_w \propto \frac{d}{dx} \sqrt{S} = O(\varepsilon)$$

$$\cos \varphi_w = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi_w}} = 1 + O(\varepsilon^2)$$

其中 ε 描述管截面变化的程度。缓变意味着 $0 < \varepsilon \ll 1$ 。结果，

$$\begin{aligned}\sigma &= S \left[1 + O(\varepsilon^2) \right] \xrightarrow{\ln} \ln \sigma = \ln S + O(\varepsilon^2) \\ \frac{d}{dx} &\rightarrow \frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dx} = \frac{1}{S} \frac{dS}{dx} + O(\varepsilon^2)\end{aligned}\quad (5-2-2)$$

因此，在缓变条件下， $\sigma \approx S$ ，且 $(1/\sigma)d\sigma/dx \approx (1/S)dS/dx$ 。



缓变声管中的声波方程

回到原坐标 x ，并考察如上图所示由两相距 dx 的波阵面所围的小区域 $\Delta V = \sigma dx$ 。在此域内对连续性方程作体积分，

$$\begin{aligned}0 &= \iiint_{\Delta V} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right) dV = \iiint_{\Delta V} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \iiint_{\Delta V} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dV \\ &\xrightarrow{\text{apply Gauss' Theorem}} \frac{\partial}{\partial t} \left(dx \int_{\sigma(x)} \rho d\sigma \right) + \int_{\sigma(x+dx)} \rho \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\sigma} - \int_{\sigma(x)} \rho \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = 0 \\ &\xrightarrow{F(x+dx) - F(x) = \frac{\partial F}{\partial x} dx} \frac{\partial}{\partial t} \left(\iint_{\sigma(x)} \rho d\sigma \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\iint_{\sigma(x)} \rho \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \right) dx = 0\end{aligned}$$

一般认为，运动与状态量（如密度 ρ ）、以及声学量在波阵面 σ 上是常数。因此，上式中的密度 ρ 可从积分号下取出，而得到管内连续性方程的一维形式：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x} (\rho U) = 0, \quad \left(U = \iint_{\sigma} \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = v\sigma \right)$$

其中 U 为经过波阵面的体积流，为轴坐标 x 的函数。因波阵面上速度 v 恒常，垂直波阵面法向，故 $U = \sigma v$ 。管内运动方程和状态方程一如理想流体者。经小振幅线性化，连续性方程、运动方程和状态方程依次可近似为：

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x} (\sigma v) = 0, \quad \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad p = c_0^2 \rho'$$

其中 ρ' 为管内密度扰动量， ρ_0 为静态密度， $p(x)$ 为声压。消去 ρ' 和 v ，得一维声压波方程，

$$\frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x} \left[\sigma \frac{\partial p}{\partial x} \right] - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (5-2-3)$$

然而，与横截面面积 S 不同，波阵面面积 σ 难于获得。为克服困难，把第一项展开，并应用缓变近似（2），

$$\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dx} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \approx \frac{1}{S} \frac{dS}{dx} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{S} \frac{\partial}{\partial x} \left(S \frac{\partial p}{\partial x} \right)$$

如此，方程(5-2-3)可近似为

$$\frac{1}{S} \frac{\partial}{\partial x} \left[S \frac{\partial p}{\partial x} \right] - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$$

对于频率 ω 、波数 k 的时间简谐的声波，此方程简为

$$\frac{1}{S} \frac{\partial}{\partial x} \left(S \frac{\partial p}{\partial x} \right) + k^2 p = 0, \text{ or, } \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{d \ln S}{dx} \frac{\partial p}{\partial x} + k^2 p = 0 \quad (5-2-4)$$

此乃变系数二阶常微分方程【注3】。

若把 p 当作“位移”， x 视为“时间”， k 视为“固有频率”，方程(5-2-4)岂非质点阻尼振动方程？只不过，此处阻尼系数 $d(\ln S)/dx$ 是“时间” x 的函数，且可正可负。若恰好“阻尼系数” $d(\ln S)/dx$ 为常数，则方程(5-2-4)乃常系数二阶常微分方程，其解当为人所熟知。此要求横截面 S 按指数形变化。

若 $d(\ln S)/dx$ 非常数，求解方程(5-2-4)殊非易事，需借助适当的数学方法。对方程(5-2-4)作函数变换：

$$p(x, t) = \frac{\psi(x, t)}{R(x)}, \left(R = \sqrt{\frac{S}{S_0}} \right) \quad (5-2-5)$$

其中 S_0 为某参考面积。波函数 $\psi(x, t)$ 满足二阶常微分方程：

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + [k^2 - u(x)] \psi = 0 \quad (5-2-6)$$

其不含波函数一阶导数项，而参变数 $u(x)$ 定义为

$$u(x) = \frac{1}{R(x)} \frac{d^2}{dx^2} R(x) \quad (5-2-7)$$

由管横截面 S 确定。反之，若按设计给定 $u(x)$ ，则可以通过以下二阶常微分方程

$$\frac{d^2 R}{dx^2} - u(x) R = 0 \quad (5-2-8)$$

反求符合设计要求的横截面 $S(x)$ 。方程(5-2-6)是标准的 Sturm-Liouville 型问题，对于诸多形式的 $u(x)$ ，存在解析解。在量子力学中它描述电子穿越势垒（势阱）的量子散射问题， $u(x)$ 是势函数。

典型缓变截面管及其声场

存在 $u(x)$ 恰为常数的特殊情形，数学处理极其简单，无须求助于复杂的数学方法。记

$$u = \mu^2$$

如此，立刻得到方程（6）之解

$$\psi_{\pm} = \psi_{a,\pm} e^{j(\omega \mp \gamma x)}, \quad (\gamma = \sqrt{k^2 - \mu^2}) \quad (5-2-9)$$

其中“ \pm ”表示分别沿管轴正向和反向传播。此声波解存在截止频率：

$$f_{\text{cutoff}} = \frac{\mu c_0}{2\pi}$$

当频率低于此频率时，声波是沿管轴指数衰减（增长）的。欲使 u 恰为此常数，按（7） R 只能取如下形式

$$\begin{aligned} 1. R &= 1 + \frac{x}{x_0} \\ 2. R &= R_0 e^{\pm \mu(x-x_0)} \\ 3. R &= a \cosh \mu x + b \sinh \mu x \\ 4. R &= a \cos \kappa x + b \sin \kappa x, (\mu = j\kappa) \end{aligned} \quad (5-2-10)$$

1. 锥形 ($\mu=0$) :
式中 x_0 为任意常数，表征号筒的扩展程度。
2. 指数形 ($\mu>0$) :
式中 R_0 表征 $x=x_0$ 处号筒的大小。
3. 悬链线形 ($\mu>0$) :
式中 a 和 b 是任意常数。
4. 正弦形 (μ 是纯虚数) :

前三者分别对应于三种典型的声学号筒 (horn) : 锥形、指数形和悬链线形

【注 4】。把(5-2-9)和(5-2-10)代入(5-2-5)，获号筒声压通解，再根据谐波速度与声压的一般关系

$$v = -\frac{1}{jk\rho_0 c_0} \frac{\partial p}{\partial x}$$

获速度解。

指数号筒

不失一般性，设指数号筒函数（10b）中的 $x_0=0$ 。无限长号筒的正向行波解为

$$\begin{cases} p = p_a e^{-\mu x + j(\omega \mp \gamma x)} \\ v = v_a e^{-\mu x + j(\omega \mp \gamma x)} \end{cases}, \left(v_a = \frac{p_a}{\rho_0 c_0} e^{-j\theta}, \tan \theta = \frac{\mu}{\gamma} \right) \quad (5-2-11)$$

号筒任意横截面处的声阻抗

$$Z_a(x) = \frac{p}{U} = \frac{p}{S(x)v} = \frac{\rho_0 c_0}{S(x)} e^{j\theta} \quad (5-2-12)$$

而声阻抗率是常数。辐射声功率

$$\bar{W} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(p^* U)_{x=0} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(Z_a|_{x=0}) |U|_{z=0}^2 = \frac{1}{2} \rho_0 c_0 S_0 \cos \theta |v_a|^2$$

在截止频率处 $\theta = \pi/2$ ，辐射功率为零【注5】。当高于截止频率时， $\cos \theta \approx 1$ ，辐射功率相近乎大活塞的，效率颇高。

悬链线号筒

悬链线号筒当取 (10c) 中的 \cosh 形最为合理自然。同样设 $x_0=0$ 。无限长悬链线号筒的解为

$$\begin{cases} p = p_a \operatorname{sech} \mu x e^{j(\omega t - \gamma x)} \\ \rho_0 c_0 v = p_a \operatorname{sech} \mu x \frac{\cosh(\mu x - j\theta)}{\cosh \mu x} e^{j(\omega t - \gamma x)} \end{cases}, \left(\tan \theta = \frac{\mu}{\gamma} \right) \quad (5-2-13)$$

$$\frac{p}{v} = \rho_0 c_0 \frac{\cosh \mu x}{\cosh(\mu x - j\theta)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{\rho_0 c_0}{\cos \theta} \quad (5-2-14)$$

在喉口 ($x=0$) 处的声阻抗

$$Z_a|_{x=0} = \frac{\rho_0 c_0}{S_0 \cos \theta}$$

为纯声阻，辐射效率很高。辐射声功率

$$\bar{W} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(p^* U) = \frac{1}{2} \frac{\rho_0 c_0 S_0}{\cos \theta} |v_a|^2$$

若喉口振速恒定，则当频率接近截止频率时，辐射功率达无穷大，辐射效率极高。此特性正与指数号筒相反。

锥形号筒

锥形号筒的解为球面波形式的解，正向传播解为

$$\begin{cases} p_{\pm} = \frac{P_a}{1 + \frac{x}{x_0}} e^{j(\omega t \pm kx)} \\ \rho_0 c_0 v_{\pm} = \left[1 + \frac{1}{jk(x+x_0)} \right] p_{\pm} \end{cases} \quad (15)$$

波数为自由空间的波数 k ，振幅与距离成反比降低。声阻抗 Z_a

$$\frac{1}{Z_a} = \frac{Sv}{p} = \frac{1}{R_a} + \frac{1}{jX_a}, \quad \left[R_a = \frac{\rho_0 c_0}{S}, X_a = \frac{\rho_0 c_0}{S} k(x+x_0) \right]$$

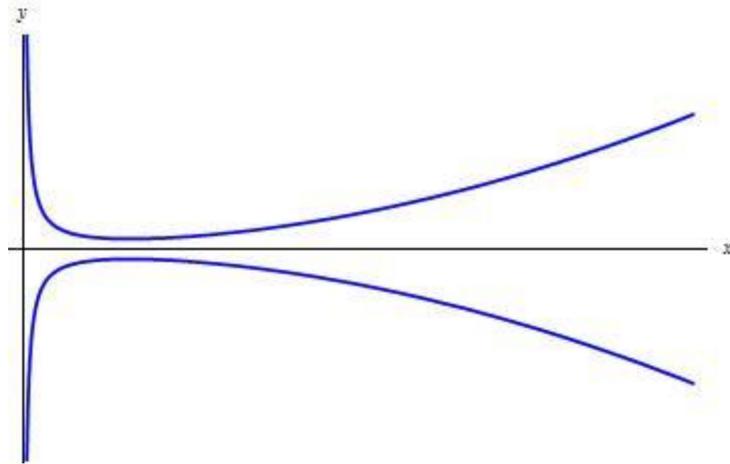
为声阻 R_a 与声抗 X_a 并联。设若在 $x=0$ 处为喉口，存在速度振幅为 v_a 的振膜，则辐射功率为

$$\bar{W} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(p^* U)_{x=0} = \frac{|p|_{x=0}^2}{2R_a} = \frac{1}{2} \rho_0 c_0 S_0 |v_a|^2 \left(\frac{kx_0}{1+kx_0} \right)^2$$

可见，在振速恒定下，低频辐射效率很低。

有趣例子

试举稍复杂但十分有趣的例子。如右图所示地道可视为声管道，入口骤然变窄，然后渐宽，其形可用如下公式描述：



$$S(x) = \left(\frac{a}{x} + bx^2 \right)^2 \quad (17)$$

常数 a 和 b 分别表征地道入口的紧缩程度和地道的纵深宽敞性。虽然入口处地道横截面 S 急剧缩小，难说缓变，但从缩紧处开始至纵深，截面可认为缓变，上述理论定性适用。把此横截面积公式代入 (7)，得到

$$u(x) = \frac{2}{x^2}$$

把 u 代入，可以直接验证，方程 (6) 具有解析解

$$\psi_{\pm}(x) = \left(1 \pm \frac{1}{jkx}\right) e^{\mp jkx} \quad (16)$$

事实上，对于给定的 u ，方程 (6) 通过变换： $z=kx$, $\psi(x)=z \Phi(z)$ ，方程 (6) 可化为此为一阶球函数方程，具有一阶球汉克尔函数解。回到原变量，即得到公式 (16)。代入公式 (5) 得到管内声压行波解

$$p_{\pm}(x,t) = \frac{P_{a,\pm}}{\frac{a}{x} + bx^2} \left(1 \pm \frac{1}{jkx}\right) e^{j(\alpha t \mp kx)} \quad (18)$$

可见，声波的波数仍为自由空间的波数，惟振幅呈复杂分布。在隧道深处 ($x \rightarrow \infty$)，

$$p_{\pm}(x,t) \approx \frac{P_{a,\pm}}{bx^2} e^{j(\alpha t \mp kx)}$$

声压振幅随距离平方下降。诚然，实际隧道深处横截面不再变宽，而几乎是常数。可以证明，此行波声场所对应的声强和传输声功率为

$$\begin{cases} I(x) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(p^* v) = \frac{\bar{W}}{\left(\frac{a}{x} + bx^2\right)^2} = \frac{\bar{W}}{S(x)} \\ \bar{W} = S(x) I(x) = \frac{|P_a|^2}{2\rho_0 c_0} \end{cases} \quad (19)$$

此公式表明，隧道开阔入口有声能收集之效。隧道外声强虽小，但总声能不小。声能经入口汇聚，悉数传入隧道，以致隧道深处依然清晰可闻。相反，隧道内声传至入口外开阔空间，讯即扩展，变得弱不可闻。故而，洞中人可闻洞外一动一静，洞外人不易察觉洞中内情。

【注 1】因刚性壁上的法向速度为零，流体质点只能沿壁面（切向）振动。又质点速度与波阵面正交，故理想流体中波阵面始终与壁面正交。

【注 2】如管横截面成圆形，则横截面积之平方根正比管半径 $R(x)$ 。于是， $\tan(\varphi_w) = dR/dx$ 。

【注 3】此方程与密度非均匀媒质的声波方程（一维）一致，只要互换 $1/S$ 和 ρ 即可。

【注 4】公式 (7a) 中的 u 也可取负的常数值，所得的 R 呈余弦或正弦形，不过声学上无多大实用意义，故本文不予考虑。

【注 5】在截止频率以下， $k < \mu$ ，声场解为

$$p = p_a e^{-\mu x - \sqrt{\mu^2 - k^2} x + j\omega t}$$

$$v = -\frac{1}{jk\rho_0 c_0} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - k^2}}{jk} \frac{p}{\rho_0 c_0}$$

其声阻抗为

$$Z_a = \frac{\rho_0 c_0}{S(x)} \frac{jk}{\mu + \sqrt{\mu^2 - k^2}} = \frac{\rho_0 c_0}{S(x)} \frac{j\omega}{\omega_{\text{cutoff}} + \sqrt{\omega_{\text{cutoff}}^2 - \omega^2}} = j\omega M_a$$

$$M_a = \frac{1}{\omega_{\text{cutoff}} + \sqrt{\omega_{\text{cutoff}}^2 - \omega^2}} \frac{\rho_0 c_0}{S(x)}$$

$$(\omega_{\text{cutoff}} = 2\pi f_{\text{cutoff}})$$

这是一个声质量抗，声质量为 M_a 。

第六章 声波的辐射

引自: <http://xlwangnu.blog.163.com/blog/static/1907192702011113124720795/>

点声源与格林函数

Point Sources of Sound and Green Functions

南京大學聲學研究所 王新龍

格林函数反映声场的基本结构，也是单位源强的点声源所辐射的声场。已知格林函数，就可通过积分法获取声场的解析表示。可见格林函数之于声场之重要性。然而，在有界媒质空间，因与边界作用之故，点声源辐射问题远较无界空间的复杂。仅当边界形状及声学性质相对简单的少数情形，才有可能获得封闭的解析解。多数情形下，最多只能获得按声场简正模式正交展开的级数解。本文首先概述基于格林函数的声场积分表示，然后简述若干重要情形的点声源辐射场（即格林函数）的求解。

一、点声源与格林函数

设流体空间体积为 V 、边界为 Σ 、声特性阻抗率为 $\rho_0 c_0$ ，其中在 $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in V$ 处存在一点声源，源强为 Q_0 。点声源犹质点是数学抽象，其源函数 $q(\mathbf{r})$ 可表为

$$q = Q_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad \left(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0 \in V, Q_0 = \iiint_V q(\mathbf{r}) dV \right)$$

其中 $\mathbf{r} = (x, y, z) \in V$ 是声场内观察点的位置，三维狄拉克- δ 函数 $\delta = \delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)$ 。不妨设此点声源的源强 $Q_0=1$ ，并假定 Σ 是阻抗型的边界，故所辐射的声场速度势 G 满足如下的有源波动方程和边界条件：

$$(\nabla^2 + k^2)G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (\mathbf{r}, \mathbf{r}_0 \in V) \quad (1a)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial n} + jk\eta \right) G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = 0, \quad (\mathbf{r}, \mathbf{r}_0 \in \Sigma) \quad (1b)$$

式中， k 是声波波数， η 是边界 Σ 的声导纳比，由 Σ 的法向声阻抗率 z_n 定义： $\eta = \rho_0 c_0 / z_n$ 。 η 有两种可能的极端： $\eta=0$ 的刚性边界和 $\eta=\infty$ 的绝对软边界。根据方程 (1b) 在绝对软边界条件下必有 $G=0$ ，即边界上的声压为零（稳态场的声压正比于速度势）。数学上，边值问题 (1) 的解 G 就是有界空间的格林函数，它既是观察点 $\mathbf{r} \in V$ 的函数，也与源点 $\mathbf{r}_0 \in V$ 有关，故特写成 $G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)$ 的函数形式。可以证明，格林函数 G 具有互易性，

$$G(\mathbf{r}_2; \mathbf{r}_1) = G(\mathbf{r}_1; \mathbf{r}_2)$$

即位于 \mathbf{r}_1 的单位源强点源在 \mathbf{r}_2 处产生的声压（正比于速度势）等于位于 \mathbf{r}_2 的单位源强点源在 \mathbf{r}_1 处产生的声压。再次强调，尽管格林函数是一个数学概念，但它与点声源的辐射声场建立了直接的关系，

$$\Phi(\mathbf{r}) = Q_0 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \quad (2)$$

即，格林函数 G 是单位源强 ($Q_0=1$) 的点声源所辐射声场的速度势 Φ 。

二、声场的积分表示

格林函数不仅具有如上所述的物理意义，更重要的是它可用于构造一般声场的解。一般情形下，空间 V 内的声场既可以是分布式体源 $q(\mathbf{r})$ 辐射所产生，也可以是（部分）边界面的振动辐射所产生，如下图所示。声场的速度势 $\Phi(\mathbf{r})$ 满足如下有源波动方程和边界条件：

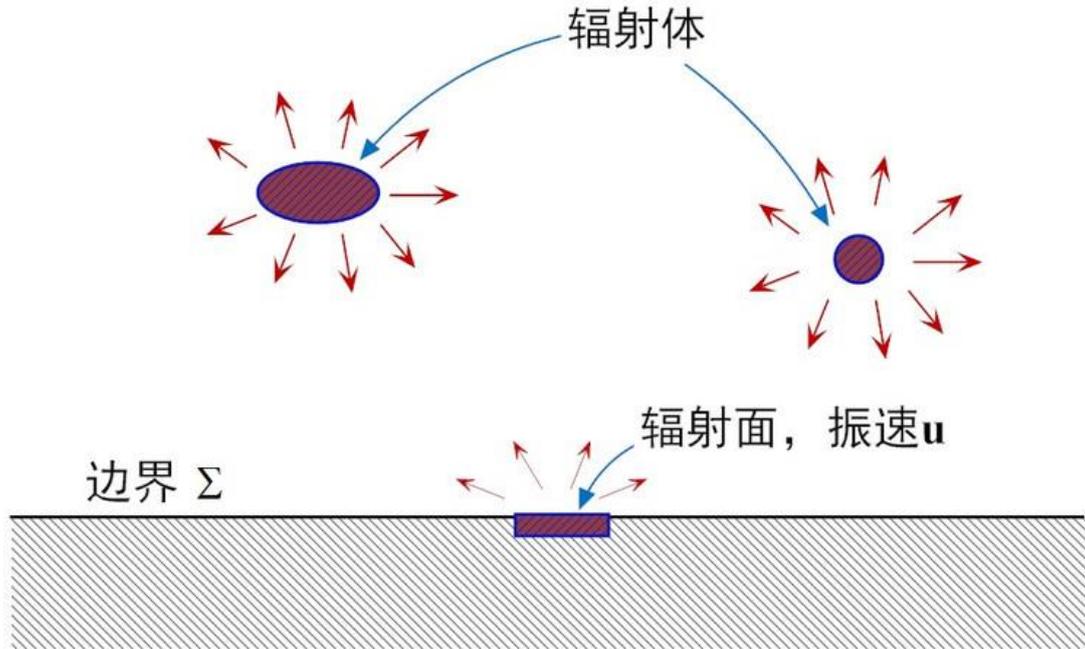
$$(\nabla^2 + k^2)\Phi(\mathbf{r}) = -q(\mathbf{r}), \quad [\mathbf{r} = (x, y, z) \in V] \quad (3a)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial n} + jk\eta\right)\Phi(\mathbf{r}) = u(\mathbf{r}), \quad (\mathbf{r} \in \Sigma) \quad (3b)$$

根据边界导纳比 η 和振速 u 的不同取值，边界条件（3b）可以是以下几种常见类型之一：

1. 刚性边界： $\eta=0$ ，且 $u=0$ ；
2. 绝对软边界： $\eta=\infty$ ，即边界上速度势 $\Phi=0$ 。
3. 给定表面法向振速： $\eta=0$ ，但 $u \neq 0$ ；
4. 阻抗型（非刚性）边界： $\eta \neq 0$ ，但 $u=0$ 。

为求解边值问题（3），一般可采用分离变量法先求（3a）的通解，然后获得满足边界条件（3b）的定解。但除声场空间具有高度对称的极少数情形之外，此种方法笨拙低效。很多情形下，更行之有效的或许是基于格林函数的积分方法，而求解格林函数问题（1）作为求解边值问题（3）的辅助问题。



图、体辐射和边界辐射示意图。

用 $G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)$ 乘方程 (3a) 左右两端，用 $\Phi(\mathbf{r})$ 乘以方程 (1a) 两端，两者相减后再对其作整个声场空间 V 的体积分，并利用三维 δ 函数的积分性质和高斯定理，得到如下积分方程

$$\oiint_{\Sigma} \left[G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \frac{\partial \Phi(\mathbf{r})}{\partial n} - \Phi(\mathbf{r}) \frac{\partial G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)}{\partial n} \right] d\Sigma = \Phi(\mathbf{r}_0) - \iiint_V q(\mathbf{r}) G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) dV$$

在此方程中交换 \mathbf{r} 和 \mathbf{r}_0 ，并利用格林函数的互易性 $G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = G(\mathbf{r}_0; \mathbf{r})$ ，最终得到有源声波方程 (3a) 解的积分表示：

$$\Phi(\mathbf{r}) = \iiint_V q(\mathbf{r}_0) G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) dV + \oiint_{\Sigma} \left[G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}_0)}{\partial n} - \Phi(\mathbf{r}_0) \frac{\partial G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)}{\partial n} \right] d\Sigma$$

($\mathbf{r} \in V$)

(4)

式中，无论是体积分还是面积分均指对坐标矢量 \mathbf{r}_0 而言的， $d\Sigma$ 是 V 在边界 Σ 上的面元，法向指向体积 V 之外。公式 (4) 形式上给出了声场的积分解。它表明，有界空间内的声场 $\Phi(\mathbf{r})$ 是体声源 q 辐射的直达声（体积分项）和边界反射或辐射声之和（面积分项）。边界对声场的影响往往体现在两方面：（甲）边界作为振动源主动辐射声波，（乙）边界被动响应声场的作用再影响声场分布。

如果仅存在有限体积的体声源 q ，而无边界 Σ ，则上列公式无面积分项。然而，实际的三维连续振动体声源，总通过自身的边界而向振动体之外空间辐射声波，故大多可按边界问题处理。另一方面，若声场空间 V 非封闭，则公式

(4) 的面积分尚需包含无穷远的面积分，例如，半径为 $R \rightarrow \infty$ 的球面积分。如果无穷远处无声波入射，则体积 V 内的声场 $\Phi(\mathbf{r})$ 尽是 V 内体声源和边界面 Σ 产生的，必有 $\Phi(\mathbf{r}) \rightarrow 0$ (熄灭条件)，故无穷远边界对声场的贡献为零，在公式 (4) 中可不考虑。反之，若有来自无穷远处的入射声波 $\Phi_i(\mathbf{r})$ ，则必须考虑 $R \rightarrow \infty$ 球面的面积分。其效果等于在公式 (4) 中额外加上入射波项 $\Phi_i(\mathbf{r})$ 。此属声散射问题，不在本文所论之列。

公式 (4) 中尚未考虑到边界条件。如果格林函数 G 取与所求声场 $\Phi(\mathbf{r})$ 所满足的边界条件 (3b) 相应的齐次边界条件 (1b)，则可公式 (4) 可直接简化为

$$\Phi(\mathbf{r}) = \iiint_V q(\mathbf{r}_0) G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) d\mathbf{r}_0 + \oiint_{\Sigma} G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) u(\mathbf{r}_0) d\Sigma \quad (5)$$

它显式地给出了声场的解 $\Phi(\mathbf{r})$ 。此公式对 Σ 的面积分直接反映了边界辐射对声场的贡献 (u 是边界的法向振速)。至于边界面的被动反射贡献，已隐含于如此构造的格林函数 G 之中。如此，一旦已知格林函数，声场速度势的求解仅积分而已矣。然而，欲求解满足与边界条件 (3b) 对应的齐次边检条件 (1b) 的格林函数 G 殊非易事，甚至并不比求解原边值问题 (3) 简单多少。事实上，格林函数 G 的边界条件不必采取完全与原边界条件 (3b) 对应的齐次形式

(1b)。在公式 (4) 的推导过程中，并未对其中的格林函数 G 的边界条件作任何限制，甚至可迳取自由空间的格林函数 g 。是以，格林函数 G 的边界条件之设定存在某种程度的主观随意性。但是，不同边界条件下所构造的格林函数 G ，不仅其本身的导出或计算难易悬殊，而且通过公式 (4) 计算声场的效率相差万千！我们的宗旨是尽可能通过公式 (4) 高效地求得声场 $\Phi(\mathbf{r})$ 的 (近似的) 解析 (或数值) 解，而合理选取格林函数 G 的边界条件则可达到事半功倍之效。

退而求其次，可令格林函数 G 满足更简单的刚性边界条件：

$$\frac{\partial G}{\partial n} = 0, \quad (\mathbf{r} \in \Sigma)$$

如此，公式 (4) 面积分中有关格林函数 G 的法向导数项自动为零。若声场 $\Phi(\mathbf{r})$ 的边界条件 (3b) 恰也有 $\eta=0$ ，则显式解的公式 (5) 依然成立；否则，公式 (4) 变为

$$\Phi(\mathbf{r}) = \iiint_V q(\mathbf{r}_0) G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) d\mathbf{r}_0 + \oiint_{\Sigma} G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) u(\mathbf{r}_0) d\Sigma - jk \oiint_{\Sigma} \eta G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \Phi(\mathbf{r}_0) d\Sigma \quad (6)$$

其中的第二项 (面积分) 仍是边界主动辐射的贡献，而第三项 (面积分) 是阻抗型边界对声场的 (被动) 反射效应，含待解的速度势函数的边界取值 $\Phi(\mathbf{r}_0)$ 。结果，公式 (6) 是积分方程，声场解是隐式的。隐式解一般可藉迭代、变分等计算方法求解。

即使令格林函数满足 $G=0$ 的固定边界条件亦未尝不可，只要能有效地获取简洁的 G 即可。若是，则公式（4）的面积分被积函数仅存包含格林函数法向导数的第二项。结果，声场解仍然是隐式的。

可见，积分方法之成败关键在于格林函数 G 的构造合适与否。因此，求解辅助问题——获取有界空间的格林函数 G （也就是点源的辐射声场解）——成为求解边值问题（3）解的数学基础。而从公式（2）可知，所求格林函数，其实就是点声源所辐射的声场。

无界空间点声源所辐射的声场是以源点为中心的球面波，有封闭的解析解。然而，有界空间因存在边界与声场的相互作用，点声源所辐射声场远为复杂，求解边值问题（1）殊非易事。仅在若干简单的情形下，可以轻易求得点源声场的封闭解析表达式，更多的时候或许只能借助声场简正模式的展开而获得点源声场的渐近级数表示。

三、无界空间离散多点声源的辐射

设无界空间有多个点声源，源 q 可用如下函数描述：

$$q(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n Q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$$

对于点声源，每个点源之辐射犹自由空间中单个点源之辐射，故格林函数 G 等于无界空间的格林函数 g ， $G=g$ ，

$$g(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \quad (6-1-1)$$

在本问题中，公式（4）右端的面积分不复存在。把上两式的 q 和 G 代入（4），立得多点源辐射的声场速度势解

$$\Phi(\mathbf{r}) = \iiint_V \left[\sum_{i=1}^n Q_i \delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_i) \right] g(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) d\mathbf{r}_0 = \sum_{i=1}^n Q_i g(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$$

可见，多点声源的辐射等于每个源单独辐射声场之叠加。须提醒，对于实际的点声源，其尺寸总有限大小，故多点源之间存在相互散射效应。仅当源之间相距足够远时，此种散射效应可忽略而可迳取 $G \approx g$ 。否则，须计及散射引起的对格林函数 G 的修正。

远场近似：如果点源位于有限的区域，坐标原点设在此区域之内，而观察点 \mathbf{r} 又远离此区域（远场： $r \gg r_i$ ），则存在近似

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i| = r \left[1 - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_i}{r^2} + O(r_i^2/r^2) \right] \approx r - \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}_i, \quad \left(\hat{\mathbf{r}} \equiv \frac{\mathbf{r}}{r}, r_i = |\mathbf{r}_i| \right)$$

式中， $\hat{\mathbf{r}}$ 是观察点方向的单位矢量。略去二阶小量后，远场速度势 $\Phi(\mathbf{r})$ 公式可近似为

$$\Phi(\mathbf{r}) \approx \sum_i Q_i g(r - \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}_i) \approx \frac{1}{4\pi r} \exp(-jkr) \sum_i Q_i \exp(jk\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}_i)$$

必须注意，虽然 $r \gg r_i$ ，但不一定有 $kr_i \ll 1$ ，故求和号内的指数函数不能冒然用泰勒级数展开。进一步，如果所有点声源的源强相等： $|Q_i|=Q_0$ ，但相位 $\varphi_i=\arg(Q_i)$ 各异，则上式可进一步写成

$$\Phi(\mathbf{r}) \approx \frac{NQ_0}{4\pi r} D(\theta) \exp(-jkr)$$

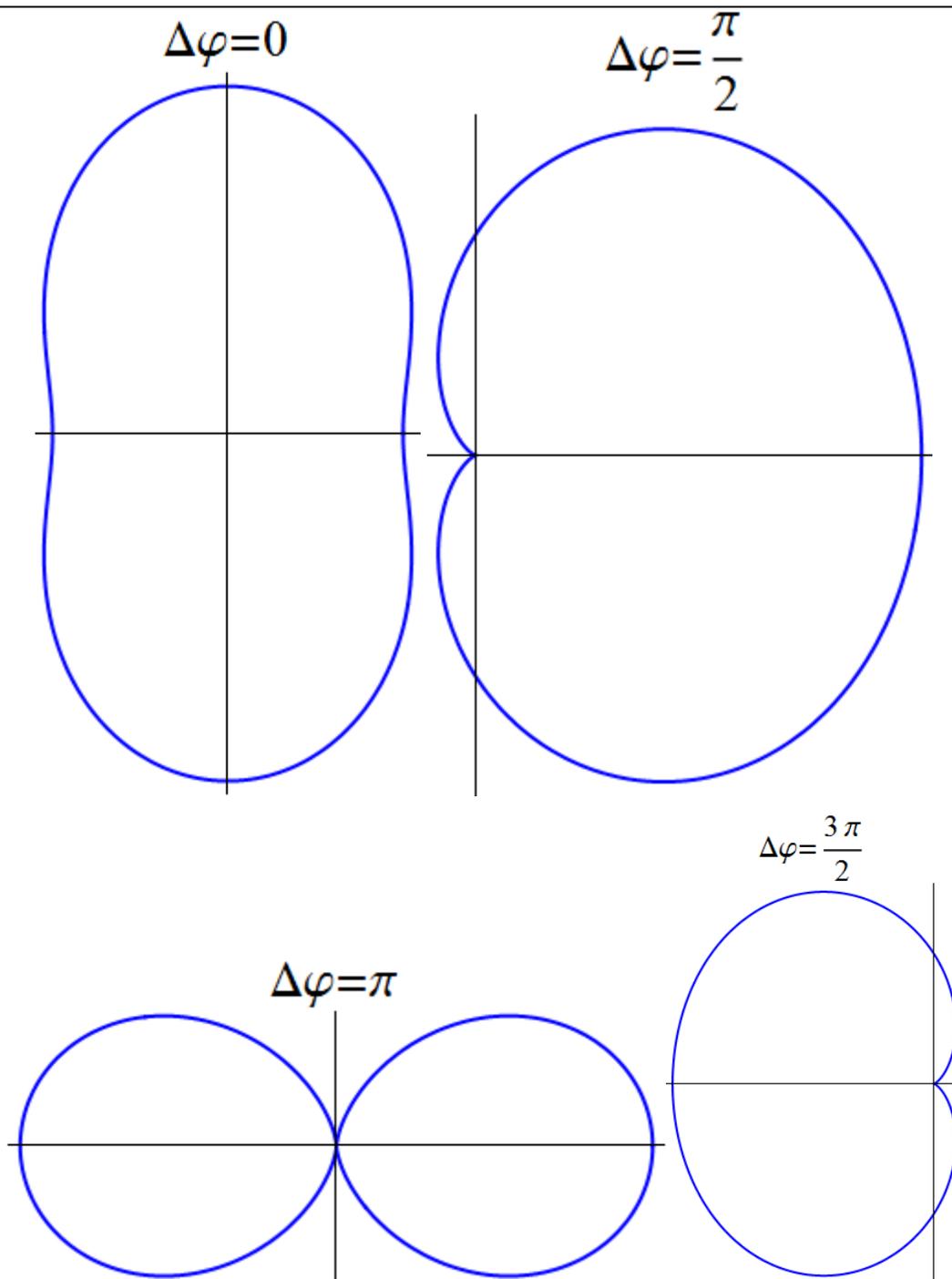
$$D(\theta) = \frac{1}{N} \sum_i \exp[j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i + \varphi_i)], \quad (\mathbf{k} \equiv k\hat{\mathbf{r}})$$

式中， N 是点源的个数， \mathbf{k} 是沿观察点 \mathbf{r} 方向的波矢，绝对值 $|D|$ 表征辐射的指向性。从 D 的表达式可知，指向性既取决于点源阵列的空间布置 \mathbf{r}_i ，也取决于源的相位 φ_i 。改变源相位有改变源点空间布置之效，而相位的改变完全可通过电子时延来简单地实现。故而，改变相位相当于虚拟地改变了声源阵列的空间配置，从而达到改变指向性（如波束方向）的目的。此即所谓相控阵技术原理。相控阵技术灵活经济而实用，在现代声学工程（如声呐）中有非常重要的应用。

例如，设两个相距 d 、源强相等为 Q_0 、位相差 $\varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi$ 的点声源位于 z 轴上，坐标原点取两点声源之中点。根据以上公式，所辐射的远场声场具有指向性

$$\begin{aligned} |D(\theta)|^2 &= \frac{1}{4} \left| e^{j(\mathbf{k}\mathbf{r}_1 + \varphi_1)} + e^{j(\mathbf{k}\mathbf{r}_2 + \varphi_2)} \right|^2 = \cos^2 \left(\frac{kd \cos \theta - \Delta\varphi}{2} \right) \\ &= \frac{1 + \cos(kd \cos \theta - \Delta\varphi)}{2} \end{aligned}$$

在 $kd=\pi/2$ 的情形下，不同的相位差 $\Delta\varphi$ 具有截然不同的指向性，如下图所示。可见，相控阵声源的指向性灵活多样。通过调节相位差，可以极其方便地调节指向性，以实现不同应用的需要。



图、不同源相位差的指向性图

四、无限大刚性平面上的点声源辐射

最简单的边界莫过无限大刚性壁。根据镜像效应，刚性边界等效于一个同相的虚声源，对称地位于边界另一侧。设刚性平面位于 $z=0$ 上，声场空间为 $z>0$ ，点源位于 $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ， $(z_0 > 0)$ ，像源位于 $\mathbf{r}'_0 = (x_0, y_0, -z_0)$ 。总声场速度势可表为

$$\Phi(\mathbf{r}, \omega) = Q_0 \left[g(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|) + g(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_0|) \right], \quad (z, z_0 > 0) \quad (8)$$

其中 g 由公式 (7) 给出。

把点声源视为半径为 a 的小球源 ($ka \rightarrow 0$)，则可求出球表面的径向辐射力 F_r ，而平均径向速度为 $u_0 = Q_0/(4\pi a^2)$ ，从而求得源的辐射力阻抗

$$Z_r = \frac{F_r}{u} = \frac{4\pi a^2}{Q_0} \oint_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|=a} p dS, \quad (p = jk\rho_0 c_0 \Phi) \quad (9)$$

把 (8) 代入 (9)，再经适当数学处理，得到阻抗的表达式

$$Z_r = R_r + j\omega M_r, \quad \begin{cases} R_r \approx \rho_0 c_0 (4\pi a^2) (ka)^2 \left(1 + \frac{\sin 2kz_0}{2kz_0} \right) \\ M_r \approx 3\rho_0 \left(\frac{4}{3} \pi a^3 \right) \left(1 + \frac{a}{2z_0} \cos 2kz_0 \right) \end{cases}$$

相比于自由空间，刚性平面强力地影响位于此平面附近的点源的辐射阻抗；如果 $kz_0 \ll 1$ ，则辐射阻几乎加倍。

应用举例：无穷大障板上的活塞辐射： 既知点源辐射声场解 (8)，即知以无穷大刚性壁面为边界条件的格林函数 G ，可用于求解半无限空间 ($z > 0$) 的任意声辐射问题。例如，镶嵌于无穷大刚性壁上的有限振动面 S (活塞，不限于圆形) 所辐射的声场 $\Phi(\mathbf{r})$ 满足边界条件：

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \begin{cases} u(\mathbf{r}), & (\mathbf{r} \in S) \\ 0, & (\mathbf{r} \notin S) \end{cases}, \quad (\mathbf{v} = -\nabla \Phi)$$

其中 u 是活塞的法向振速。根据积分公式 (5)，

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}) &\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial z}} - \iint_S G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \frac{\partial \Phi}{\partial z} dS \\ &\xrightarrow{G=2g \text{ at } z=0, \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -u \text{ on } S} \iint_S 2g(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|) u(\mathbf{r}_0) dx dy \\ &\xrightarrow{g(r) = \frac{1}{4\pi r} e^{-jkr}} \frac{1}{2\pi} \iint_S \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} u(x_0, y_0) dx_0 dy_0, \quad [\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, 0)] \end{aligned}$$

相应的辐射声压为

$$p(\mathbf{r}) = jk\rho_0c_0\Phi(\mathbf{r}) = \frac{jk\rho_0c_0}{2\pi} \iint_S \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} u(x_0, y_0) dx_0 dy_0$$

此乃活塞辐射声场的精确解，由此可以得到近场、远场的各种近似【1】。

五、刚性波导中的点声源

波导是轴向（z 方向）可传播而横向受限的声学空间。在横截面(x,y)上，声场呈驻波。描述波导横向声场特性的是二维简正模式 Φ_m ，满足：

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_m^2 \right) \phi_m(x, y) = 0, (x, y) \in S \\ \frac{\partial \phi_m}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = 0 \end{cases}, \left(\iint_S \phi_m^* \phi_n dx dy = S \delta_{m,n} = S \times \begin{cases} 1, m = n \\ 0, m \neq n \end{cases} \right)$$

式中 k_m 是第 m 次模式的简正波数， S 是波导横截面（面积），星号表示复共轭。其实，在刚性边界下，波导简正模式 Φ_m 和简正波数 k_m 皆为实数，包括波数 $k_0 = 0$ 的平面波模式： $\Phi_0 = 1$ 。一般这些简正模式 Φ_m 构成正交完备的函数空间，故位于 \mathbf{r}_0 的点声源所辐射的声场可以按 Φ_m 展开。考虑到点声源辐射的对称性，此展开当具如下的形式

$$\Phi = \sum_m A_m \phi_m(x, y) e^{-jk_{z,m}|z-z_0|}, \left(k_{z,m} = \sqrt{k^2 - k_n^2} \right)$$

表明左右辐射的声场对称；当 $z > z_0$ 时，所辐射的声波沿 z 轴正向传播；而当 $z < z_0$ 时反向传播。将此展式代入（1），并根据简正模式 Φ_m 的正交性，得到方程

$$A_m \left[(k^2 - k_m^2) e^{-jk_{z,m}|z-z_0|} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} e^{-jk_{z,m}|z-z_0|} \right] = -\frac{Q_0}{S} \phi_m^*(x_0, y_0) \delta(z - z_0)$$

对上式从 z_0 左侧积分到右侧，并利用 δ 函数的积分性质，求得待定系数

$$A_m = \frac{Q_0}{2jk_{z,m}S} \phi_m^*(x_0, y_0)$$

代回 Φ 的展开式，得到点源辐射声场的速度势 Φ ，

$$\Phi(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \frac{Q_0}{2jkS} \left[e^{-jk|z-z_0|} + \sum_{n \neq 0} \frac{k}{k_{z,n}} \phi_n^*(x_0, y_0) \phi_n(x, y) e^{-jk_{z,n}|z-z_0|} \right]$$

$$\left(k_{z,n} = \sqrt{k^2 - k_n^2} \right)$$

其中，第一项是平面波模式，而求和级数中是 $m>0$ 是高次模式，即有传播的 ($k > k_n$)，也有非传播的 ($k < k_n$)。既然点声源可视为半径为 a 的小球源之极限，则可利用此声场解通过公式 (9) 计算球源表面的辐射力阻抗：球表面的径向合力除以径向速度。经复杂的数学处理，可证明【2】，球源表面上的声辐射力阻抗为

$$Z_r = R_r + j\omega M_r, \begin{cases} M_r = 4\pi a^3 \rho_0 \left[1 - \frac{2\pi a}{S} \sum_{n \neq 0} k_n^{-1} |\phi_n(x_0, y_0)|^2 \right] \\ R_r = \rho_0 c_0 \frac{(2\pi a^2)^2}{S} \left[1 + \sum_{n \neq 0} \frac{|\phi_n(x_0, y_0)|^2}{\sqrt{1 - (k_n/k)^2}} \right] \end{cases}$$

可见，相比于自由空间，管道点源的声辐射质量下降了，而辐射阻抗当 $ka \rightarrow 0$ 时趋向常数。此说明管壁的存在增强了点源的低频声辐射能力。

六、封闭空间内的点源

在诸如房间等封闭空间内，点源声场可按简正模式 Φ_n 展开

$$\Phi = \sum_n A_n \phi_n(\mathbf{r})$$

这些简正模式 Φ_n 满足三维的 Helmholtz 方程和刚性边界条件

$$\begin{cases} (\nabla^2 + k_n^2) \phi_n(\mathbf{r}) = 0, (\mathbf{r} \in V) \\ \frac{\partial \phi_n}{\partial n} = 0, (\mathbf{r} \in \Sigma) \end{cases},$$

$$\iiint_V \phi_m^* \phi_n dV = V \delta_{m,n} = V \times \begin{cases} 1, (m = n) \\ 0, (m \neq n) \end{cases}$$

式中 k_n 是对应于简正模式 Φ_n 的简正波数。把展开式代入 (1)，再利用简正模式 Φ_n 之正交性，立即求得展开系数

$$A_n = -\frac{Q_0}{V} \frac{\phi_n^*(\mathbf{r}_0)}{k^2 - k_n^2}$$

于是，得到点源声场的正交模式展开式

$$\Phi(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = -\frac{Q_0}{V} \sum_n \frac{\phi_n^*(\mathbf{r}_0) \phi_n(\mathbf{r})}{k^2 - k_n^2}$$

当点声源的频率等于某一简正频率时，声场发生共振。根据此级数解，可以计算非常靠近源点的球面 ($|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|=a$) 上的平均声压 $\langle p \rangle$ ，进而计算表面的辐射力 F_r 。经复杂的数学处理【3】，得到

$$\langle p \rangle = \frac{F_r}{4\pi a^2} = \oint_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|=a} (-j\omega\rho_0\Phi) dS \xrightarrow{a \rightarrow 0} jk\rho_0 c_0 Q_0 \left[\frac{1}{4\pi a} + \frac{k^2}{V} \sum_{n \neq 0} \frac{|\phi_n(\mathbf{r}_0)|^2}{k_n^2(k_n^2 - k^2)} \right]$$

代入 (9) 得到点源辐射阻抗

$$Z_r \approx j\omega(4\pi a^3)\rho_0 \left[1 + \frac{4\pi a^3}{V} \sum_{n \neq 0} \frac{(ka)^2 |\phi_n(\mathbf{r}_0)|^2}{(k_n a)^2 (k_n^2 a^2 - k^2 a^2)} \right]$$

对于刚性壁面，简正模式函数和简正波数皆为实数，上式方括号内为实数，表明边界的效果相当于增加了声源的辐射质量，而辐射阻为零。但是，若壁面是吸声的，简正波数是虚数，声阻抗中存在辐射阻的分量，所辐射的声能被壁面吸收。

【1】杜功焕等著《声学基础》第 6.5 节 (344-362 页)

【2】P. M. Morse & K. U. Ingard, 《理论声学》中译本 591 页。

【3】P. M. Morse & K. U. Ingard, 《理论声学》中译本 659 页。

引自: <http://xlwangnu.blog.163.com/blog/static/1907192702011112031427801/>

声场互易原理

Principle of Reciprocity of Sound Fields

声场互易原理

南京大学声学研究所 王新龍

声场互易性是线性声场的重要性质，体现了源与观测点的“身分地位”的可逆性和对等性，不仅具有的声学理论意义，而且在声学测量和声学器件设计中具有重要的应用价值。本文系统地讨论了无界和有界空间、点声源和有限尺寸声源的互易原理，旨在使读者理论上对此重要规律有更深入全面的理解。

无界空间

设流体空间位于 $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ 处存在频率 ω 、源强 Q_0 的点声源，其在场点 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ 所辐射的声场速度势 Φ 满足波动方程

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) + k^2 \Phi(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = Q_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (1)$$

式中 ρ_0 和 c_0 分别为流体静密度和声速， $k = \omega/c_0$ 是声波波数， δ 是三维空间的 δ -函数。特以诸如 $\Phi(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)$ 的格式表示场量，第一变量表示场点（观测点）的位置 \mathbf{r} ，第二变量标记源点位置 \mathbf{r}_0 。采用速度势 $\Phi = \Phi(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)$ 取代声压 $p = p(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)$ ，可使点源声波方程(1)更加简洁明了。若 $Q_0 = -1$ ，(1)即为格林函数所满足的方程。对于谐波，声压 p 与速度势 Φ 之间存在简单关系： $p = -j\omega\rho_0\Phi$ 。

方程(1)的无界空间解可表为

$$\Phi(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = -Q_0 g(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|), \quad g(r) = -\frac{jk}{4\pi} h_0^{(2)}(kr) = \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \quad (2)$$

式中 $h_0^{(2)}(z)$ 是零阶球 Hankel 函数， $g(r)$ 是无界空间格林函数，是方程(1)取 $Q_0 = -1$ 时的解。解(2)虽为数学结果，却昭示了源与观测点的互易性：

$$\Phi(\mathbf{r}_2; \mathbf{r}_1) = \Phi(\mathbf{r}_1; \mathbf{r}_2) \quad (3)$$

即，位于 \mathbf{r}_1 点的源①在 \mathbf{r}_2 点所产生的声场，与位于 \mathbf{r}_2 点的源②在 \mathbf{r}_1 点所产生的场相等。此即自由空间的**声场互易原理**。若源①和源②的源强不等，分别为 Q_1 和 Q_2 ，则取代(3)的公式是如下关系

$$\frac{\Phi(\mathbf{r}_2; \mathbf{r}_1)}{Q_1} = \frac{\Phi(\mathbf{r}_1; \mathbf{r}_2)}{Q_2} \quad (4)$$

根据互辐射声阻抗的定义，上式两端分别为两源的互辐射声阻抗（除以因子 $-jk\rho_0 c_0$ ）。故而，互易性体现为互辐射阻抗的相等。

对于自由空间而言，互易性显而易见，因源点与场点的相互作用仅与其间的相对距离 r 有关。但若把互易原理推广到有界空间，则多少有点意外。

有界空间

设有限空间 V 存在边界 Σ ，既可以是单个界面，也可以是多界面组合： $\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2+\dots$ 。现设 V 内 \mathbf{r}_0 位置处存在频率 ω 、源强 Q_0 的点声源，它在观测点 \mathbf{r} 产生的声场 $\Phi(\mathbf{r};\mathbf{r}_0)$ 服从同样的波动方程(1)，但另须满足齐次边界条件：

$$a \frac{\partial \Phi}{\partial n} + b \Phi = 0, \quad (\mathbf{r} \in \Sigma) \quad (5)$$

其中的 $\partial/\partial n$ 表示对边界的外法向导数。 a 和 b 是与 Σ 上的位置无关的常数； $a=0$ 但 $b \neq 0$ 表示固定压强边界 ($p=0$ ，如在远离声源位置)， $a \neq 0$ 但 $b=0$ 表示刚性边界，而 $a \neq 0$ 同时 $b \neq 0$ 则表示最常见的非刚性边界——阻抗边界。再后一种情形下，边界的法向声阻抗率 z_n 为有限，边界上声压 p 和法向速度 v_n 满足 $p - z_n v_n = 0$ 。把 $p = -j\omega\Phi$ 和 $v_n = \partial\Phi/\partial n$ 代入，得到如(5)的标准型边界方程

$$z_n \frac{\partial \Phi}{\partial n} + jk\rho_0 c_0 \Phi = 0, \quad (\mathbf{r} \in \Sigma)$$

现设源强分别为 Q_1 和 Q_2 的两个点声源，分别位于 \mathbf{r}_1 和 \mathbf{r}_2 ，所辐射的声场 $\Phi(\mathbf{r};\mathbf{r}_1)$ 和 $\Phi(\mathbf{r};\mathbf{r}_2)$ 分别满足点源波动方程(1)和边界条件(5)；当然，方程(1)的 (\mathbf{r}_0, Q_1) 须分别用 (\mathbf{r}_1, Q_1) 和 (\mathbf{r}_2, Q_2) 取代，即

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r};\mathbf{r}_i) + k^2 \Phi(\mathbf{r};\mathbf{r}_i) = Q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \quad (\mathbf{r}, \mathbf{r}_i \in V, i=1,2) \quad (6)$$

对 $i=1$ 的方程两边乘以 $\Phi(\mathbf{r};\mathbf{r}_2)$ ， $i=2$ 的乘以 $\Phi(\mathbf{r};\mathbf{r}_1)$ ，结果相减后作体积 V 的积分，并利用高斯定理以及三维 δ 函数的积分性质，得到

$$\iint_{\Sigma} \left[\Phi(\mathbf{r};\mathbf{r}_2) \frac{\partial}{\partial n} \Phi(\mathbf{r};\mathbf{r}_1) - \Phi(\mathbf{r};\mathbf{r}_1) \frac{\partial}{\partial n} \Phi(\mathbf{r};\mathbf{r}_2) \right] dV = Q_1 \Phi(\mathbf{r}_1; \mathbf{r}_2) - Q_2 \Phi(\mathbf{r}_2; \mathbf{r}_1)$$

势函数 $\Phi(\mathbf{r};\mathbf{r}_1)$ 和 $\Phi(\mathbf{r};\mathbf{r}_2)$ 皆满足边界条件(5)，所以上式左端面积分为零，因此得到互易关系(4)。此表明，有界空间中满足齐次边界条件的点源辐射声场仍然是互易的。【注：以上积分推导中，若边界 Σ 非封闭构成 V ，则还应有无穷远处的面积分存在，以构成高斯定理所需的封闭边界。惟对有限辐射声场，必有 $1/r$ 的衰减，况且实际问题中总存在（即使非常小）的吸收衰减，遂使无限远处满足 $\Phi=0$ 的边界条件，故面积分为零，可不予考虑（下同）。】

有限尺寸声源情形

在一定条件下，有限尺寸声源所辐射声场仍具有互易性。由于声源占据一定空间，不存在单一的声源标识位置（如 \mathbf{r}_0 ），下面直接用下标标识不同的声源及其辐射的场；如 Φ_1 是①辐射的场。先以有限面积的面声源为例。

面声源

设有两个面声源①和②，各有振动表面 S_1 和 S_2 ，振速 u_1 和 u_2 ，所辐射的速度势满足如下波动方程和边界条件：

$$\nabla\Phi_i + k^2\Phi_i = 0, \quad (\mathbf{r} \in V), \quad \begin{cases} a\frac{\partial\Phi_i}{\partial n} + b\Phi_i = 0, & (\mathbf{r} \in \Sigma) \\ \frac{\partial\Phi_i}{\partial n} = u_i, & (\mathbf{r} \in S_i) \end{cases}, \quad (i=1,2) \quad (7)$$

下标 $i=1$ 是声源①的, $i=2$ 是声源②的。注意, u_i 可能是振源表面位置的函数。现在, 除了原有的边界 Σ 之外, 还有 S_1 和 S_2 , 总边界为 $\Sigma+S_1+S_2$ 。对(7)式 $i=1$ 的方程乘以 Φ_2 , $i=2$ 的乘以 Φ_1 , 把结果相减并作体积分:

$$\iiint_V (\Phi_2 \nabla \Phi_1 - \Phi_1 \nabla \Phi_2) dV = \iint_{\Sigma+S_1+S_2} \left(\Phi_2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} - \Phi_1 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} \right) dS = 0$$

因体 V 内无源, 故上述积分应等于零。把面积分分解为沿 Σ 和 S_1 、 S_2 三个积分,

$$\iint_{\Sigma} \left(\Phi_2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} - \Phi_1 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} \right) dS + \iint_{S_1} \left(\Phi_2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} - \Phi_1 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} \right) dS + \iint_{S_2} \left(\Phi_2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} - \Phi_1 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} \right) dS = 0$$

根据 Σ 上的齐次边界条件, 上式第一项为零, 而当 S_1 作为声源辐射声场 Φ_1 时, S_2 对 S_1 仅起刚性边界的作用, 反之亦然*。如此, 上式积分简为

$$\iint_{S_1} u_1 \Phi_2 dS = \iint_{S_2} u_2 \Phi_1 dS, \quad \left(u_i = \frac{\partial \Phi_i}{\partial n}, i=1,2 \right) \quad (8)$$

或用声压 $p_i = -j\omega\Phi_i$ ($i=1, 2$) 表示, 则有

$$\iint_{S_1} u_1 p_2 dS = \iint_{S_2} u_2 p_1 dS \quad (9)$$

此即互易定理之推广形式。若两声源为平面活塞, 振速为常数, 则上式简为

$$u_1 F_{2 \rightarrow 1} = u_2 F_{1 \rightarrow 2}, \quad \text{或者}, \quad \frac{F_{2 \rightarrow 1}}{u_2} = \frac{F_{1 \rightarrow 2}}{u_1} \quad (10)$$

式中, $F_{2 \rightarrow 1} = \iint_{S_1} p_2 dS$, $F_{1 \rightarrow 2} = \iint_{S_2} p_1 dS$, 分别为声源②所辐射声场对声源①的作用力, 及声源①所辐射声场对声源②的作用力。(10)的后一等式表明**互辐射力阻抗是互易的**。若两声源的表面振速 u_i 是源表面分布函数:

$$u_i = u_{a,i} \alpha_i(\mathbf{r}), \quad (\mathbf{r} \in S_i, i=1,2)$$

$u_{a,i}$ 为源速度振幅最大值, α_i 为归一化分布函数, 则可以定义有效辐射力

$$F_{2 \rightarrow 1} = \iint_{S_1} p_2 \alpha_1(\mathbf{r}) dS, \quad F_{1 \rightarrow 2} = \iint_{S_2} p_1 \alpha_2(\mathbf{r}) dS$$

于是, 互易关系可表为:

$$\frac{F_{2 \rightarrow 1}}{u_{a,2}} = \frac{F_{1 \rightarrow 2}}{u_{a,1}}$$

*或者也可以这样认为: 当两声源尺寸均较小且相距甚远的情形下, 在对 S_1 的积分中, $|\partial\Phi_2/\partial n| \ll |\partial\Phi_1/\partial n|$, 故可忽略; 反之亦然

进一步，若假设两个声源足够小（长波近似），以致一个源在另一源面上所辐射的声压几为常数。如此，公式(9)可近似为，

$$p_2|_{r \in S_1} Q_1 \approx p_1|_{r \in S_2} Q_2, \left(Q_i = \iint_{S_i} u_i dS, i = 1, 2 \right)$$

式中 Q_i 分别为两个声源的源强。或者，

$$\frac{p_1|_{r \in S_2}}{Q_1} \approx \frac{p_2|_{r \in S_1}}{Q_2} \quad (11)$$

此式表明，单位源强的声源①在声源②处产生的声压，近似等于单位源强声源②在①处产生的声压。其实，公式(11)等式左右所给出的，不过是两个声源的**互辐射声阻抗**而已。因此，互易性体现了互辐射声阻抗近似相等的事实。

体声源

对于有限大小的体声源，声源体积流密度 $q(\mathbf{r})$ 是空间位置 \mathbf{r} 的函数，所辐射声场满足有源波动方程和齐次边界条件：

$$\nabla^2 \Phi + k^2 \Phi = q(\mathbf{r}), \left(a \frac{\partial \Phi}{\partial n} + b \Phi \right)_{r \in \Sigma} = 0 \quad (12)$$

设有两体声源①和②，辐射体积分别为 V_1 和 V_2 ，各有体积流密度分布 $q_1(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in V_1$ 和 $q_2(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in V_2$ ，分别辐射声场 $\Phi_1(\mathbf{r})$ 和 $\Phi_2(\mathbf{r})$ 。根据类似的推导，得到类于(8)的互易关系：

$$\iiint_{V_1} \Phi_2(\mathbf{r}) q_1(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \iiint_{V_2} \Phi_1(\mathbf{r}) q_2(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (13)$$

或者，采用声压 $p_1 = -j\rho_0 \omega \Phi_1$ 和 $p_2 = -j\rho_0 \omega \Phi_2$ ，有类似(9)的互易关系

$$\iiint_{V_1} p_2(\mathbf{r}) q_1(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \iiint_{V_2} p_1(\mathbf{r}) q_2(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (14)$$

同样，在长波近似下， p_1 在 V_2 内近似常数， p_2 在 V_1 内近似常数，而有类于(11)的互辐射阻抗相等的互易关系：

$$\frac{p_1|_{r \in V_2}}{Q_1} \approx \frac{p_2|_{r \in V_1}}{Q_2}, \left(Q_i = \iiint_{V_i} q_i(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right) \quad (15)$$

式中 Q_i 是各体声源的源强。

以上论述中，假定在体积 V 内媒质是均匀的。

非均匀媒质情形

事实上，互易性也存在于非均匀介质中。下仅以面声源为例说明。

由于声压与速度势的关系 $p = -j\omega\rho_0\Phi$ 中，静密度 ρ_0 不再常数，我们宁愿采用

声压而非速度势来代表声场。谐波情形下，非均匀媒质（密度 ρ_0 是位置坐标的函数）服从如下波动方程：

$$\rho_0 \nabla \cdot \left(\frac{\nabla p}{\rho_0} \right) + \frac{\omega^2}{c_0^2} p = 0 \quad (16)$$

式中的 ρ_0 和 c_0 均可能是坐标 \mathbf{r} 的函数： $\rho_0 = \rho_0(\mathbf{r})$ ， $c_0 = c_0(\mathbf{r})$ 。设有两声源①和②，占空间体积分别是 V_1 和 V_2 ，表面积 S_1 和 S_2 ，法向振速 u_1 和 u_2 （也可能是表面位置函数），各在 V 内产生声压场 $p_1(\mathbf{r})$ 和 $p_2(\mathbf{r})$ ， V 的边界为 Σ 加上 S_1 和 S_2 ；在 Σ 上满足边界条件(5)。在 V 内 $p_1(\mathbf{r})$ 和 $p_2(\mathbf{r})$ 各自满足方程(16)，经类似的数学处理，得到

$$p_2(\mathbf{r}) \nabla \cdot \left(\frac{\nabla p_1(\mathbf{r})}{\rho_0} \right) - p_1(\mathbf{r}) \nabla \cdot \left(\frac{\nabla p_2(\mathbf{r})}{\rho_0} \right) = \nabla \cdot \left[\frac{p_2(\mathbf{r}) \nabla p_1(\mathbf{r}) - p_1(\mathbf{r}) \nabla p_2(\mathbf{r})}{\rho_0} \right] = 0$$

作关于 V 的体积分，并应用高斯定理，得到

$$\iint_{\Sigma+S_1+S_2} \frac{1}{\rho_0} [p_2(\mathbf{r}) \nabla p_1(\mathbf{r}) - p_1(\mathbf{r}) \nabla p_2(\mathbf{r})] \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Σ 上的积分仍为零，根据同样的理由， ∇p_2 在 S_1 上的取值为零， ∇p_1 在 S_2 上的取值为零，所以，

$$\iint_{S_1} p_2(\mathbf{r}) \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial n} p_1(\mathbf{r}) dS = \iint_{S_2} p_1(\mathbf{r}) \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial n} p_2(\mathbf{r}) dS$$

根据欧拉方程，即得到互易关系(9)。在适当的假设下，就有简单关系(10)或者(11)。所以互易关系在非均匀介质中仍然成立。

事实上，可以进一步把互易原理推广到具有密度突变界面的广义非均匀介质中，即使传播途中声波发生了界面上的反射和折射（例如，经过分层介质）互易原理仍然成立。

互易原理可以解释诸多有趣声学现象。例如，一个收发两用的声学换能系统，其辐射指向性与接受指向性相等。

引自: <http://xlwangnu.blog.163.com/blog/static/19071927020111123113755633/>

声辐射压力

Sound Radiation Pressure

南京大學聲學研究所 王新龍

在线性声学范畴，简谐声压的时间周期均值为零。但是，若计及声场的二级非线性效应，则不但平均声压非零，而且存在因动量流而产生的声场辐射作用力，两者之合构成声辐射应力，其中沿声传播方向的分量即为声辐射压力。声辐射压力是置身声场中的物体所“感受”到的额外压力。本文详细推导了理想流体中声辐射应力的一般表达式。

在均匀理想流体中，流体运动服从欧拉方程

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P \quad (1)$$

和连续性方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2)$$

两式中， \mathbf{v} 是流体质点速度矢量， P 是流体压强， ρ 是流体密度；三者皆为空间坐标矢量 \mathbf{x} 和时间 t 的函数。方程（1）两边乘以密度 ρ ，方程（2）两边乘以速度 \mathbf{v} ，两者相加，并对任意由封闭曲面 S 包围的空间体积 V 积分，并利用数学的高斯定理，得到流体的动量守恒方程

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \mathbf{v} dV = - \oiint_S (P + \rho \mathbf{v} \mathbf{v}) dS$$

等式左端表示单位时间内体积 V 内动量的增加，右端是作用在边界 S 上的压力与流过 S 进入 V 的动量之和。声压是单位面积上的压力，具有无方向性，故而可以用压力张量 $(-P \mathbf{I})$ 来表示。此处 \mathbf{I} 非声强，而表示单位张量。单位张量 \mathbf{I} 与任意矢量的点积等于该矢量。所以，压力张量 $(-P \mathbf{I})$ 与有向面积元 dS 的点积， $-P \mathbf{I} \cdot dS = P dS$ ，是作用在该面元上的压力，方向与面积元的法向相反。因此，上式积分号下括号内的被积函数可以写成张量的形式： $P \mathbf{I} + \rho \mathbf{v} \mathbf{v}$ 。又由于上式右端的封闭表面积分是通过封闭表面作用在流体体积 V 上的力，张量 $P \mathbf{I} + \rho \mathbf{v} \mathbf{v}$ 就是流体的应力张量，与任意面积元矢量 dS 的点积 $(P \mathbf{I} + \rho \mathbf{v} \mathbf{v}) \cdot dS$ 是作用在该面元上的合力。在声波情形下，所感兴趣者是声扰动量，包括声压 $p = P - P_0$ (P_0 静压)、质点振速 \mathbf{v} 诸扰动量。应力扰动 \mathbf{M} 是应力张量相对于静压 P_0 的偏离， $\mathbf{M} = P \mathbf{I} + \rho \mathbf{v} \mathbf{v} - P_0 \mathbf{I}$ ，即

$$\mathbf{M} = p \mathbf{I} + \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \quad (3)$$

对于声波的周期扰动，所感兴趣者乃时间周期均值，如声强者是也。 \mathbf{M} 的周期平均即为辐射应力张量：

$$\overline{\mathbf{M}} = \overline{p}\mathbf{I} + \overline{\rho\mathbf{v}\mathbf{v}} \quad (4)$$

【注：本文一律采用表达式上的横杠表示时间周期平均。】在一阶近似下，平均声压为零。若再略去（4）等式右端的第二项（是二阶小量），则辐射应力张量等于零。所以，声辐射应力张量是一个二阶小量，与声能密度 ε 和声强 I 一样。要正确地计算辐射应力张量，声压 p 也须计及二阶小量。要特别强调，在二阶近似下，如声压 p 等扰动量的时间平均不一定等于零。在《再论声学量的时间均值》一文中，导出了用速度势表示的声压表达式

$$p \approx \rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho_0 \left[\frac{1}{c_0^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 - |\nabla \Phi|^2 \right], \quad (\mathbf{v} = -\nabla \Phi) \quad (5)$$

把（5）代入（4），并注意到速度势 Φ 时间导数的平均值为零，得到如下以速度势表示的辐射应力张量的二阶近似表达式

$$\overline{\mathbf{M}} \approx \frac{1}{2} \rho_0 \left[\frac{1}{c_0^2} \overline{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2} - \overline{(|\nabla \Phi|^2)} \right] \mathbf{I} + \rho_0 \overline{(\mathbf{v}\mathbf{v})} \quad (6)$$

此即辐射应力张量之一般表达式。

流体声波是纵波，振速方向沿波传播方向（波矢方向）。从（6）式可见，在与波矢 \mathbf{k} 相垂直的方向上，无因动量流引起的辐射应力，只存在平均声压引起的辐射应力张量。而在传播方向 \mathbf{k} 上辐射应力张量的分量——**辐射压力**——为

$$\overline{\mathbf{M}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \varepsilon \hat{\mathbf{k}}, \quad \left(\hat{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{k}}{k} \right)$$

其中平均声能密度

$$\begin{aligned} \overline{\varepsilon} &= \frac{1}{2} \rho_0 \left[\frac{1}{c_0^2} \overline{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2} + \overline{|\nabla \Phi|^2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \rho_0 \overline{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} + \frac{\overline{p^2}}{2\rho_0 c_0^2} \end{aligned}$$

所以，辐射压力的方向沿传播方向，大小恰等于**平均声能密度**。上列平均声能密度的最后等式利用了线性近似关系： $p \approx \rho_0 \partial \Phi / \partial t$ ，所差者根据（6）式不过是更高阶小量，可以忽略不计。

既知辐射压力，可以计算作用在任意曲面 S 上的辐射力

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} &= -\iint_S \overline{\mathbf{M}} \cdot d\mathbf{S} = -\iint_S \overline{\mathbf{M}} \cdot d\mathbf{S} \\
&= -\iint_S \frac{1}{2} \rho_0 \left[\frac{1}{c_0^2} \overline{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2} - \overline{|\nabla \Phi|^2} \right] \mathbf{I} \cdot d\mathbf{S} - \iint_S \rho_0 \overline{(\mathbf{v}\mathbf{v})} \cdot d\mathbf{S} \\
&= \frac{1}{2} \rho_0 \iint_S \left[\overline{|\nabla \Phi|^2} - \frac{1}{c_0^2} \overline{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2} \right] d\mathbf{S} - \rho_0 \iint_S \overline{\left(\nabla \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)} dS
\end{aligned} \tag{7}$$

式中， $d\mathbf{S}$ 为大小 dS ($=|d\mathbf{S}|$)、方向指向曲面 S 外法向的面元矢量， $\partial/\partial n$ 为沿此法向的导数。根据定义 (3)，辐射压力的方向定义为压力的方向，故上式积分前取负号。上式是用实数声场量表示的辐射力。如果声场是时间简谐的，则可用复数表示声场量如速度势，上式因此可简写为

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4} \rho_0 \iint_S \left[\overline{|\nabla \Phi|^2} - k^2 \overline{|\Phi|^2} \right] d\mathbf{S} - \frac{1}{2} \rho_0 \operatorname{Re} \left[\iint_S \nabla \Phi^* \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS \right] \tag{8}$$

式中，星号*表示复共轭， $k=\omega/c_0$ 是波数。

对于作用于一个物体上的辐射力，公式 (8) 的积分面 S 应是包围该物体的封闭曲面。但是，当声波入射于物体上时，物体的散射造成物体边界面上的声场极为复杂，试图用公式 (8) 计算作用于散射体的辐射力，难度甚大。为了克服此困难，特取另一包围 S 的远场封闭曲面 S_∞ ，此曲面与物体表面的曲面 S 一起构成介于两者之间流体的边界： $S_\infty+S$ 。根据动量守恒的事实，辐射应力沿此两封闭曲面的积分应为零，故而

$$-\frac{\mathbf{F}}{\rho_0} = \frac{1}{4} \iint_{S_\infty} \left(\overline{|\nabla \Phi|^2} - k^2 \overline{|\Phi|^2} \right) d\mathbf{S} - \frac{1}{2} \iint_{S_\infty} \operatorname{Re} \left(\nabla \Phi^* \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) dS \tag{9}$$

等式左端取负号盖因外法线方向相反之故：公式 (8) 中积分表面的法线方向指向散射物体之内，而公式 (9) 中指向 S_∞ 之外（即径向方向）。在公式 (9) 中，声场速度势是远场速度势，可以通过远场渐近近似得到比较简单的公式。一般， S_∞ 为以散射物为中心、半径 r ($kr \rightarrow \infty$) 的球面。

当声场具有 (z) 轴对称时（如球体对平面波的散射），仅存在 z 轴分量的辐射力 F_z ，公式 (9) 遂而简为

$$-\frac{F_z}{\rho_0 \pi r^2} = \frac{1}{2} \int_0^\pi \left(\overline{|\nabla \Phi|^2} - k^2 \overline{|\Phi|^2} \right) \cos \theta \sin \theta d\theta - \operatorname{Re} \int_0^\pi \frac{\partial \Phi^*}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \sin \theta d\theta$$

(10)

式中 θ 是球坐标的极角。

引自：<http://xlwangnu.blog.163.com/blog/static/1907192702011102911524168/>

自由空間的點聲源

Point source of sound in free space

南京大學聲學研究所 王新龍

點聲源猶質點，是聲源的數學抽象。點聲源不僅是理解尺寸小於波長的小型聲源輻射的基礎，而且是構成一般聲輻射的基本元素：任意聲源輻射的聲場皆可視為點聲源輻射聲場之疊加。本文論述點聲源輻射的理論及輻射特性。

一、數學模型與聲場解

聲源振動激勵周圍流體而輻射聲波。當存在聲源時，流體空間的聲場服從有源波動方程。設 $q(\mathbf{r}, t)$ 是聲源在單位時間內單位體積產生的流量，在包圍聲源體積為 V 的空間之內，源所產生的總流量為

$$Q(t) = \iiint_V q(\mathbf{r}, t) dV$$

假定空間產生體積流的區域收縮成位於 \mathbf{r}_0 的幾何點，同時保持流量 Q 有限且恆定。為此，在空間位置 \mathbf{r}_0 點單位體積內的流量 q 必趨於無窮大，即，

$$q(\mathbf{r}, t) = Q(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad \left[\iiint_V \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dV = 1 \right]$$

此即點聲源的數學描述。式中 δ 是 Dirac-Delta 函數，在 \mathbf{r}_0 處奇異，但除點 \mathbf{r}_0 之外處處為零。因此，點聲源服從如下 δ 源聲波方程

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\rho_0 \frac{dQ(t)}{dt} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (1)$$

式中 ρ_0 是球外流體靜密度， c_0 是流體的聲速。如果引入速度勢 Φ ，則流體質點速度 \mathbf{v} 和聲壓可表為

$$\mathbf{v} = -\nabla\Phi, \quad p = \rho_0 \frac{\partial\Phi}{\partial t} \quad (2)$$

代入方程 (1)，得到速度勢 Φ 滿足的波動方程

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -Q(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (3)$$

設有以 \mathbf{r}_0 為球心、半徑 $a \rightarrow 0$ 的無限小球，包圍點源。方程 (3) 在此無限小球上的體積分為

$$\iiint_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| \leq a} \left(\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right) dV = \iiint_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| \leq a} [-Q(t) \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)] dV$$

$$\iiint_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| \leq a} \nabla \cdot (\nabla \Phi) dV - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \iiint_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| \leq a} \Phi dV = -Q(t)$$

$$\oiint_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|=a} \nabla \Phi \cdot d\mathbf{S} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \iiint_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| \leq a} \Phi dV = -Q(t)$$

上式第一个积分在所考虑的小球面上的面积分，而第二个体积分是对小球体的体积分，方程右端利用了 δ 函数的数学性质。

顯然，點聲源的聲場具有以源點為中心的球對稱性： $p = p(r, t)$ 。在源之外，波動方程 (1) 是齊次的，其徑向向外傳播（輻射）的通解為

$$\Phi = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c_0}\right), \quad (r = \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|) \quad (4)$$

式中，波函數 $f(z)$ 描述所輻射球面波之具體形狀，由源決定。根據歐拉運動方程，此速度勢場所對應的質點速度 \mathbf{v} 及其在半徑為 $a \rightarrow 0$ 的、球心位於源點的球面上的面積分為

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= -\nabla \Phi = \left[f\left(t - \frac{r}{c_0}\right) + f'\left(t - \frac{r}{c_0}\right) \frac{r}{c_0} \right] \frac{\nabla r}{r^2} \\ \lim_{a \rightarrow 0} \oiint_{r=a} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} &= \lim_{a \rightarrow 0} \oiint_{r=a} \left[f\left(t - \frac{r}{c_0}\right) + f'\left(t - \frac{r}{c_0}\right) \frac{r}{c_0} \right] \frac{\nabla r}{r^2} \cdot d\mathbf{S} \\ &= 4\pi \lim_{a \rightarrow 0} \left[f\left(t - \frac{a}{c_0}\right) + f'\left(t - \frac{a}{c_0}\right) \frac{a}{c_0} \right] \\ &= 4\pi f(t) \end{aligned}$$

其中，函數 f 上的撇號表示對 $f(\tau)$ 的導數： $f'(\tau) = df(\tau)/d\tau$ 。顯然，根據質量守恆，上式左端的封閉曲面積分等於 $Q(t)$ 。所以，

$$f(t) = \frac{Q(t)}{4\pi}$$

由此確定了 f 的形式。代入 (4)，得到點聲源的聲場解：

$$\Phi = \frac{1}{4\pi r} Q \left(t - \frac{r}{c_0} \right)$$

$$p = \rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\rho_0}{4\pi r} Q' \left(t - \frac{r}{c_0} \right) \quad (5)$$

若源 Q 是簡諧的，頻率為 ω ，源強為 Q_a ，

$$Q(t) = Q_a e^{j\omega t}$$

則聲場解 (5) 化為諧波解：

$$\Phi(\mathbf{r}, k) = \frac{Q_a}{4\pi r} e^{j(\omega t - kr)}$$

$$p(\mathbf{r}, k) = jk \rho_0 c_0 \Phi(\mathbf{r}, k) \quad (6)$$

式中波數 $k = \omega/c_0$ 。相應的流體徑向速度：

$$v_r = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \left(1 + \frac{1}{jkr} \right) jk \Phi(\mathbf{r}, k) = \left(1 + \frac{1}{jkr} \right) \frac{p}{\rho_0 c_0} \quad (7)$$

和徑向聲阻抗率

$$Z_s = \frac{p}{v_r} = \frac{\rho_0 c_0}{1 + \frac{1}{jkr}} \xrightarrow{kr \gg 1} \rho_0 c_0 \quad (8)$$

公式 (7) 表面，遠場 ($kr \gg 1$) 的徑向速度和聲壓近似服從平面聲波的關係。公式 (8) 也指出，遠場的徑向聲阻抗率近乎平面波的。

二、輻射特性

在包圍點源、半徑為 a 的球面上 ($ka \ll 1$)，球內 (發聲器件) 施加球外的力是 $(4\pi a^2)p$ ，從而產生徑向速度 v_r ，因此輻射力阻抗為

$$Z_r = \frac{4\pi a^2 p}{v_r} \Big|_{r=a} = 4\pi a^2 Z_s \Big|_{r=a}$$

把公式 (8) 代入，得到輻射力阻抗的表達式：

$$Z_r = R_r + j\omega M_r, \quad \begin{cases} \frac{R_r}{R_{r0}} = \frac{(ka)^2}{1+(ka)^2} \approx (ka)^2 \\ M_r = \frac{3\rho_0 V_a}{1+(ka)^2} \approx 3\rho_0 V_a \end{cases}, \quad \begin{cases} R_{r0} = 4\pi a^2 \rho_0 c_0 \\ V_a = \frac{4}{3}\pi a^3 \end{cases}$$

所以，聲源存在一個等效輻射質量——同振質量 M_r ，大小約為小球排開體積 V_a 所佔流體質量的三倍。等效的聲質量為，

$$M_a = \frac{M_r}{(4\pi a^2)^2} \approx \frac{\rho_0}{4\pi a} \quad (9)$$

與小球的半徑 a 成反比。

根據聲壓和徑向速度的表達式（6）和（7），得到點聲源輻射的聲強

$$I = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(p^* v_r) = \frac{|p|^2}{2\rho_0 c_0}$$

與平面聲波的表達式無異。事實上，公式（7）的速度表達式的第二項相當於無功項，對輻射功率無貢獻。由於聲壓 p 反比於徑向距離，聲強 I 反比於距離平方。由於聲強的各向同性，對聲強的任意球面積分——平均聲輻射功率

$$\overline{W} = 4\pi r^2 I = \frac{\rho_0}{8\pi c_0} |\omega Q|^2$$

是常數。者當然是能量守恆所必然的。

從（7）式可知，點聲源輻射的聲波在遠場（ $kr \gg 1$ ）近乎平面聲波，但在近場（ $kr \ll 1$ ）與平面聲波截然不同。近場徑向速度 v_r 存在很大的與聲壓相差 $\pi/2$ 相位的成份。媒質質點的這部分振動動能並非向外輻射出去，而是駐留在源的周圍。平均動能密度和勢能密度分別為

$$\bar{\epsilon}_k = \frac{1}{2} \overline{\rho_0 v_r^2} = \frac{1}{4} \rho_0 |v_r|^2 = \frac{|p|^2}{4\rho_0 c_0^2} \left(1 + \frac{1}{k^2 r^2}\right)$$

$$\bar{\epsilon}_p = \frac{\overline{p^2}}{2\rho_0 c_0^2} = \frac{|p|^2}{4\rho_0 c_0^2}$$

動能的第一部分與勢能密度相等，其和為

$$\bar{\epsilon}_{\text{rad}} = \frac{|p|^2}{2\rho_0 c_0^2}$$

是輻射的能量，滿足輻射關係

$$I = \bar{\epsilon}_{\text{rad}} c_0$$

動能的第二部分

$$\bar{\epsilon}_{\text{nonrad}} = \frac{|p|^2}{4\rho_0 c_0^2} \frac{1}{(kr)^2}$$

是非輻射性的無功能量，駐留於源周圍，在源附近極大。把（6）代入，得到徑向單位厚度的球殼上儲存的非輻射聲能為

$$(4\pi r^2) \bar{\epsilon}_{\text{nonrad}} = \frac{\rho_0}{16\pi} \left| \frac{Q_a}{r} \right|^2 \propto \frac{1}{r^2}$$

即，愈近源點，球殼內所儲存的聲能愈大。可見，這部分聲能集中駐留在聲源周圍，給聲源附加很大的輻射質量（9）。

三、格林函數與聲場的互易性

公式（6）也可以寫成如下形式

$$\begin{cases} \Phi(\mathbf{r}, \omega) = Qg(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \\ p(\mathbf{r}, \omega) = \rho_0(j\omega Q)g(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \end{cases}, \quad \left(Q = Q_a e^{j\alpha t}, g(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \frac{e^{-jk r}}{4\pi r} \right)$$

式中， g 是無界媒質中聲場的格林函數，它滿足方程

$$\nabla^2 g + k^2 g = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

格林函數 g 可用零階球漢克爾函數 h 表示如下：

$$g(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = -\frac{jk}{4\pi} h_0(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|), \quad [h_0(z) = j_0(z) - jn_0(z)]$$

可見，格林函數 g 是無界空間中單位源強（ $|Q|=1$ ）點聲源所輻射聲場的速度勢。

因為 $g(\mathbf{r}_1; \mathbf{r}_2) = g(\mathbf{r}_2; \mathbf{r}_1)$ ，點源聲場具有空間互易性（reciprocity），即位於 \mathbf{r}_1 的源在 \mathbf{r}_2 處產生的聲壓，與位於 \mathbf{r}_2 處的源在 \mathbf{r}_1 點產生的聲壓相等。此乃一般聲場互易原理之最簡特例。

第七章 声波的接收与散射

引自: <http://xlwangnu.blog.163.com/blog/static/190719270201111108396923/>

汽泡共振原理

Principle of Bubble Resonance

南京大學聲學研究所 王新龍

水含有大量气泡，大者浮于水面，小者附着壁面，微者溶于水中。通常泡内气压与周围流体达到平衡，气泡呈静态。若有声波从水中入射其上，声扰动引起气泡脉动，遂有二级声辐射——气泡散射。气泡散射异于常者（如刚性球）在于，气泡腔体因声波作用发生强烈的压缩膨胀，可等效为一个声容，与固有的辐射声抗形成共振结构。在共振下，汽泡散射强度巨大，简直无与伦比。此即所谓汽泡共振散射现象。本文简述小振幅气泡共振的基本原理。

设水（或其它液体）密度为 ρ_0 ，声速为 c_0 ，弹性系数为 κ_0 ，汽泡静态半径为 a ，其中气体密度为 ρ_1 ，声速为 c_1 ，弹性系数为 κ_1 。现有频率为 ω 的简谐平面声波入射汽泡上，入射声压和速度分别为 p_i 和 v_i 。假设入射波长 $\lambda=2\pi c_0/\omega$ 足够长，以致同时满足 $ka \ll 1$ 和 $k_1 a \ll 1$ ，其中 k 和 k_1 分别为水中和汽泡内的波数。在此平面声波作用下，汽泡发生交变膨胀与压缩。在长波近似下，泡内声压 p_1 几乎均匀，表面做均匀振动——脉动，振速 $u(t)$ 。忽略汽泡与水在表面可能存在的物质和热交换，则根据线性弹性关系，知泡内声压 p_1 与表面振速 u 存在如下简单关系：

$$p_1 = -\frac{Q(t)}{j\omega C_a}, \left(Q(t) = 4\pi a^2 u(t), C_a = \frac{V_0}{\rho_1 c_1^2}, V_0 = \frac{4}{3}\pi a^3 \right) \quad (7-1-1)$$

其中 $Q(t)$ 是汽泡表面因振动而产生的体积流量， V_0 是汽泡静态体积， C_a 是汽泡声容。公式（1）表明，在整体作均匀压缩膨胀的过程中，汽泡作为腔体（cavity），相当于一个声容元件，与 Helmholtz 共鸣器的腔体无异。汽泡作为散射体而存在声容，是汽泡散射与诸如刚性球等散射本质差异之所在。

汽泡的振动产生二级（次级）辐射声场——散射声压 p_s 和质点速度 v_s 。在长波近似下，汽泡作球对称脉动，所辐射声场也必然球对称，具有一般脉动球源辐射的形式。所以，汽泡表面的辐射声阻抗为写为

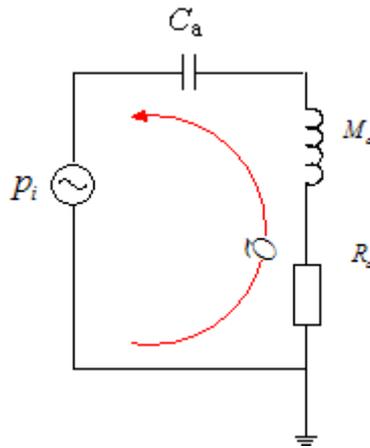
$$\left. \frac{P_s}{S_0 v_s} \right|_{r=a} = R_a + j\omega M_a = R_0 (k^2 a^2 + jka) \\ \left(R_0 = \frac{\rho_0 c_0}{S_0}, S_0 = 4\pi a^2 \right) \quad (2)$$

式中， R_a 是辐射声阻， M_a 是辐射声质量（同振质量）。

泡内外声场在泡-液界面须满足边界衔接条件。此处，略去表面张力的影响，故泡内外声压连续。又小泡很小（ $ka \ll 1$ ），表面入射声波几乎均匀， p_i 可视为常数，对应的入射波速度 v_i 在泡表面所产生的净体积流微乎其微，可略而不计，故汽泡体积流 Q 近乎散射波体积流 $S_0 v_s$ 。再计入（1）和（2），得到如下两个边界方程

$$p_i + p_s|_{r=a} \approx -\frac{1}{j\omega C_a} Q, \quad p_s|_{r=a} \approx (R_a + j\omega M_a) Q \quad (3)$$

上列方程可用右图所示的类比电路描述。此乃典型的受迫驱动串联共振回路，与亥姆霍兹共鸣器无异。方程（3）的解为



$$Q \approx -\frac{p_i}{Z_a}, \quad Z_a = R_a + j\omega M_a + \frac{1}{j\omega C_a} \quad (4)$$

式中， Z_a 是汽泡声容与辐射声阻抗共同构成的总声阻抗——汽泡声阻抗，也即类比电路的总阻抗。当此阻抗的虚部为零时，汽泡发生共振，共振频率为

$$f_r = \frac{\omega_r}{2\pi} = \frac{1}{2\pi \sqrt{M_a C_a}} = \frac{c_1}{2\pi a} \sqrt{\frac{3\rho_1}{\rho_0}} \quad (5)$$

可见，共振频率与泡内外媒质性质有关，泡内外密度比越小，频率越低。也与汽泡大小成反比，半径越小，频率越高。对于水中普通汽泡，密度可能比空气稍大，声速与空气声速相近，所以，

$$f_r \approx \frac{3.2}{a}$$

若汽泡半径是 10 微米，则 f_r 约为 3kHz. 汽泡散射功率 W_s 即为类比线路中声阻 R_a 上消耗的功率。再除以汽泡上的入射声功率，即得汽泡散射因子 α_s 和散射截面 σ_s 的解析式

$$\begin{aligned} \alpha_s &= \frac{W_s}{\pi a^2 I_i} \approx 4\Gamma\left(\frac{f}{f_r}\right) \\ \sigma_s &= \frac{W_s}{\pi a^2 I_i} = S_0 \Gamma\left(\frac{f}{f_r}\right) \end{aligned} \quad (6)$$

其中 I_i 是气泡上的入射声强，函数

$$\Gamma(\nu) = \frac{1}{(k_r a)^2 \nu^2 + \left(1 - \frac{1}{\nu^2}\right)^2} = \begin{cases} \nu^4, & (\nu \ll 1) \\ 1, & (\nu = 1) \\ 1, & (\nu \gg 1) \end{cases} \quad (7)$$

是气泡散射的功率谱，频率相对于共振频率归一化。公式 (7) 中的 k_r 是水中共振波数：

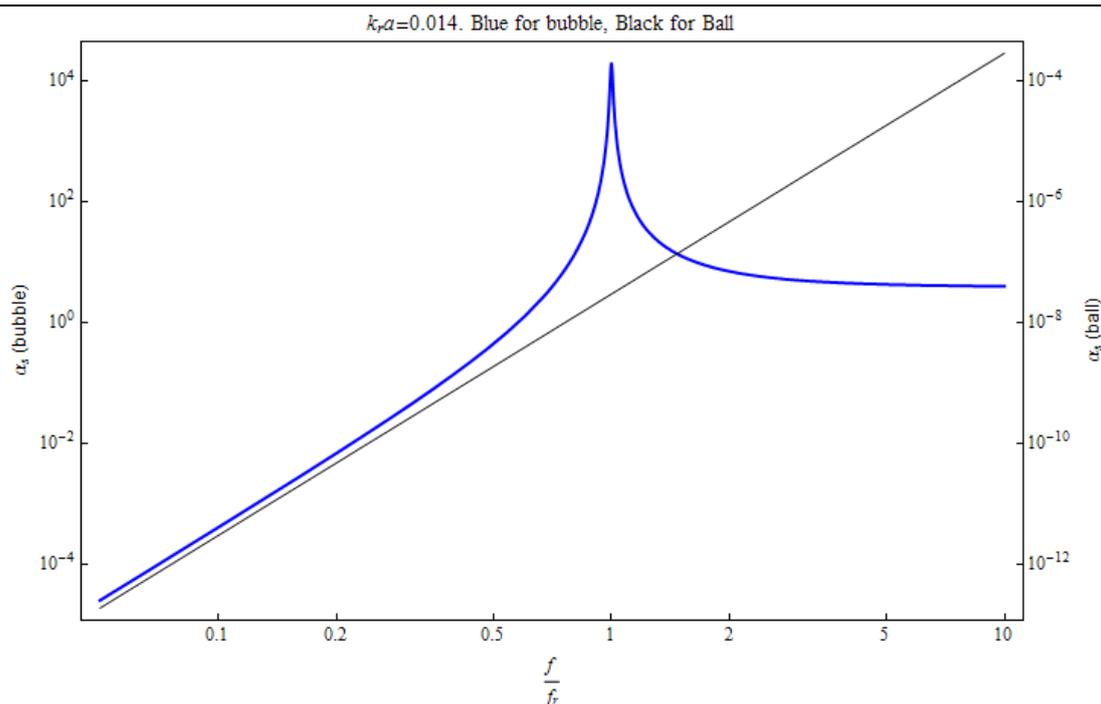
$$k_r a = \frac{2\pi f_r}{c_0} = \frac{c_1}{c_0} \sqrt{\frac{3\rho_1}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{3\kappa_1}{\kappa_0}}$$

对于通常水汽泡， $k_r a \approx 0.014 \ll 1$ ，而汽泡中该值约为 0.06。当然，以上近似理论成立，尚需满足 $k_1 a \ll 1$ ，或

$$f \ll f_r \sqrt{\frac{\rho_0}{3\rho_1}} \approx 16f_r$$

对于水中汽泡，一般要求 $f < 10f_r$ 。在远超共振频率之上，须考虑入射声场沿泡面的分布，且泡内声压不再均匀，存在泡内声场。

从公式 (6) 可见，在远低于共振频率的低频，汽泡散射仍属瑞利散射，与频率的四次方成正比。但是，汽泡共振时的散射强度巨大，散射因子大至千万（注意： $k_1 a \ll 1$ ）。下图根据公式 (6) 绘出了水中汽泡散射因子频谱（蓝线）。图中黑线是同样大小钢球在水中的散射因子，其横坐标刻度在图的右侧。在共振频率附近，相比汽泡，钢球的散射微乎其微。在汽泡共振频率处，汽泡散射因子达 10^4 的量级，可谓巨哉！从散射截面角度来看，共振时 σ_s 超过汽泡表面积



值得注意的是共振时泡内的声压大小。从公式（1）和（4）得到共振时泡内声压与入射声压的幅度比：

$$\left. \frac{p_1}{p_i} \right|_{\omega=\omega_r} = \left. \frac{1/j\omega C_a}{Z_a} \right|_{\omega=\omega_r} = \frac{1}{\omega_r R_a C_a} = \frac{1}{k_r a}$$

对水中气泡，一般 $k_r a \approx 0.014$ ，故此比值可达 72，说明气泡内的声压非常大。事实上，在如此高的声压下，气泡已处非线性状态。

气泡的强散射效应，是造成声波在含泡媒质中衰减的主因。上述简单理论未计入的气泡表面物质与热交换，也会导致共振时强烈的声吸收。所以，含泡媒质是强耗散媒质，声传播衰减很大，对诸如水声通信等应用带来不利影响。另一方面，气泡的强散射有重大的实用价值。例如，各鱼群发出不同的气泡群；利用气泡的共振散射，可以达到鱼类跟踪识别的目的。在医学诊断方面，超声造影剂正是利用气泡的高强度共振散射而达到高清成像之目的。

引自: <http://xlwangnu.blog.163.com/blog/static/1907192702012111524325386/>

散射声场的积分表示

Integral Representation for Scattered Sound Fields

南京大學聲學研究所 王新龍

因传播途径存在各类声障碍物，远方入射声波的部分声能偏离原传播方向成为散射波。本文所关心的是狭义散射，即引起散射的障碍物（散射物）的尺寸与声波波长相当或小于波长。散射物或是媒质声性质的连续起伏，或是存于传播途中的“异物”，或是界面“缺陷”。与辐射问题类似，散射声场也可藉格林函数而以积分形式表示——积分方程。积分表示特别适合于处理诸如水中气泡群散射、空中水雾散射等复杂散射问题。但积分方程所给出的是声场的隐式解。为获显式解，往往需要应用诸如玻恩近似等近似法于积分方程。本文旨在导出散射声场的最一般积分表示，而不对具体问题作深入研讨。

一、散射问题描述

与声辐射不同，声散射（acoustic scattering）是因媒质声性质变化而引起的声波效应。在标准的散射问题中，所考虑的有限声空间内既无体声源 q ，亦无面声源，但有远方入射声波 p_i （理论上声源位于无穷远）。入射声波 p_i 在其正常传播途中因受声障碍物的干扰，部分声能偏离原传播方向而成为反射波（reflected waves） p_r 或散射波（scattered waves） p_s 。所谓声障碍物，既可以是媒质声性质的连续起伏，也可以是“正常”传播途径上的“异物”。对于后者而言，既可以视为传播媒质性质的不连续，也可以视为声场空间的边界。究竟如何处理，殆视具体问题而定。并非所有障碍物都被视为散射物（散射体或散射面）。就本文所关心的狭义散射而言，散射物概指其几何尺寸相当于或小于声波波长的障碍物。

在不均匀媒质中，声压场 p 满足声波方程

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla p \right) - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$$

式中媒质密度 ρ 和体弹性常数 κ 在有限体积 V 内是空间位置矢量 $\mathbf{r}=(x,y,z)$ 的（连续或不连续）函数： $\rho=\rho(\mathbf{r})$ ， $\kappa=\kappa(\mathbf{r})$ 。在诸如湍流等媒质中，媒质参数或是时间的函数。然而，本文仅考虑 ρ 和 κ 无关乎时间之情景，且假定，在远离散射物（ $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$ ）， ρ 和 κ 皆趋于均匀： $\rho \rightarrow \rho_0$ （常数）， $\kappa \rightarrow \kappa_0$ （常数）。由于声波方程是齐次无源的，迳取声压 p 为声场的描述，而非如辐射问题中那样使用声速度势 Φ 。上列声波方程可写成如下的形式

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \nabla \cdot (\alpha \nabla p) - \frac{1}{c_0^2} \beta \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

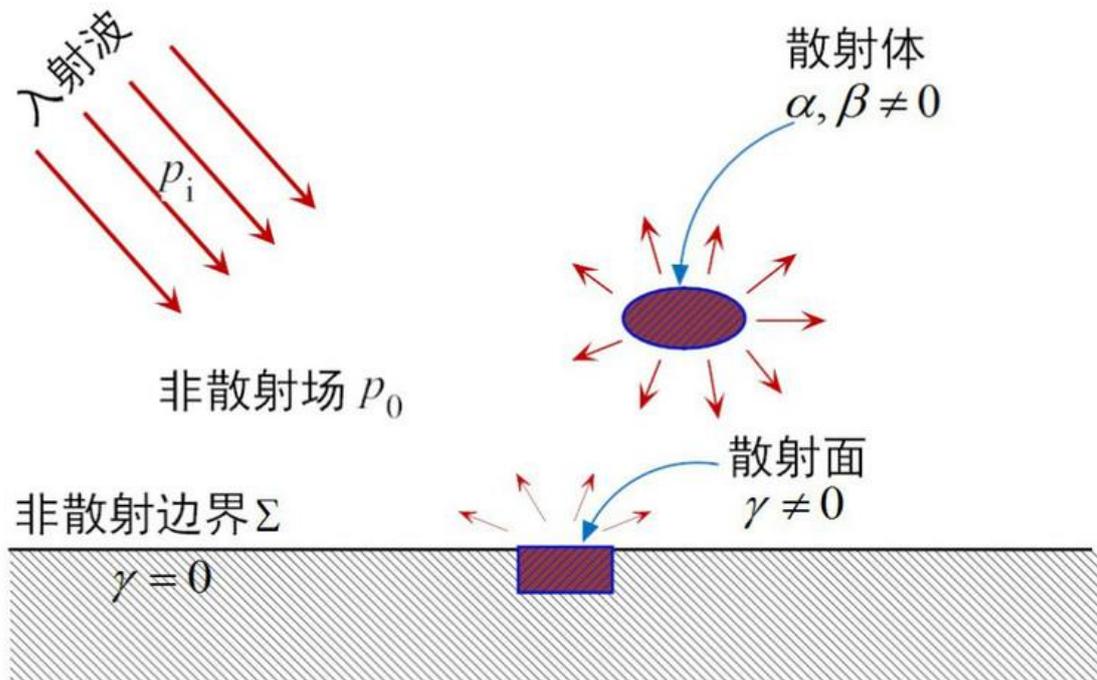
对于频率为 ω 的时间简谐稳态声场，更可简为【注 1】

$$\nabla^2 p + k^2 p = \nabla \cdot (\alpha \nabla p) + k^2 \beta p \quad (1)$$

式中， $k=\omega/c_0$ 是入射声波 p_i 的波数， α 和 β 描述 ρ 和 κ 的相对变化率：

$$\begin{cases} \alpha = \alpha(\mathbf{r}) = 1 - \frac{\rho_0}{\rho} \\ \beta = \beta(\mathbf{r}) = 1 - \frac{\kappa_0}{\kappa} \end{cases} \quad (2)$$

须注意，勿混此处定义的 β 与先前定义的媒质压缩率为一谈。再次强调，本文所谓的非均匀，既指连续的不均匀，也指不连续的不均匀。例如，就水中气泡（视为散射体）或空中雾滴而言， α 和 β 在散射体在泡外皆为零，而在泡内或雾滴内为非零的常数。



图、存在散射体和散射面的有界空间。若无散射物，入射波 p_i 在边界 Σ 上反射，产生反射声波 p_r ，形成非散射的声场 $p_0=p_i+p_r$ 。

此外，声场空间可能存在不被视为散射物的边界 Σ 。例如，一般不把半无限空间的有限阻抗壁面视为散射物，而是视为反射界面，其上声压满足边界条件：

$$\left(\frac{\partial}{\partial n} + jk\eta \right) p = 0, \quad (\mathbf{r} \in \Sigma)$$

式中， η 是边界 Σ 的（无量纲的）声导纳率比。因散射问题中假定边界 Σ 上不存在面辐射元，故边界条件是齐次的。但是，边界亦可能因局部区域的声导纳率比 η 偏离“正常”声导纳率比 η_0 而散射声波。比如，刚性面上的一个局域缺陷就是一个散射面源，它使原来由入射波 p_i 和刚性反射波 p_r 构成的声场 $p_0=p_i+p_r$ 发生畸变。为突出界面散射，重写上列边界条件为

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial n} + jk\eta_0 \right) p &= -jk\gamma p, \quad (\mathbf{r} \in \Sigma) \\ (\gamma &\equiv \eta - \eta_0) \end{aligned} \quad (3)$$

类似于 α 和 β ， γ 衡量引起散射的边界的不均匀度。

总声场 p 是非散射声场 p_0 与散射声场 p_s 之叠加： $p=p_0+p_s$ 。 p_0 是散射物全然不存在（ $\alpha=0$ ， $\beta=0$ ， $\gamma=0$ ）时的声场，满足齐次波动方程和边界条件：

$$\nabla^2 p_0(\mathbf{r}) + k^2 p_0(\mathbf{r}) = 0, \quad (\mathbf{r} \in V) \quad (4)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial n} + jk\eta_0 \right) p_0(\mathbf{r}) = 0, \quad (\mathbf{r} \in \Sigma) \quad (5)$$

1、等效声源与二次辐射

对照《理想流体声波方程》一文公式（15）与公式（1）便知， ρ 的不均匀等效于存在单位体积的外力 \mathbf{f} ，而 κ 的不均匀性等效于存在一个体积流 q ：

$$\begin{cases} \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) = \alpha(\mathbf{r}) \nabla p(\mathbf{r}, t) \\ q(\mathbf{r}, t) = \frac{\beta(\mathbf{r})}{\kappa_0} \frac{\partial}{\partial t} p(\mathbf{r}, t) = -\beta(\mathbf{r}) \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}, t), \quad (\mathbf{r} \in V) \end{cases}$$

式中 \mathbf{v} 是流体质点的速度。而边界条件（3）表面，边界的不均匀等效于存在法向振速为

$$u(\mathbf{r}, t) = \gamma(\mathbf{r}) \frac{p(\mathbf{r}, t)}{\rho_0 c_0}, \quad (\mathbf{r} \in \Sigma)$$

的面声源。正是这些等效声源的辐射产生了散射声场。惟等效声源非外部所施，且正比于待求的声场量 p 。此二次（secondary）辐射之谓也。而从方程（1）和（3）之形式而言，散射是因方程参数（ α 、 β 和 γ ）的变异而引起的，颇类于参量激励，可视之为参数辐射。

2、无穷远边界条件

除了边界条件 (3) 之外, 尚须外加无穷远边界条件。因在无穷远, 散射的影响趋于无, 故而

$$p(\mathbf{r}) \xrightarrow{|\mathbf{r}| \rightarrow \infty} p_0(\mathbf{r}) \quad (6)$$

其中声压 p_0 满足方程 (4) 和 (5)。方程 (1) 连同边界条件 (3-4) 构成了声散射的边值问题。须注意, 无穷远处的声压 p_0 不尽是入射波 p_i 。例如, 刚性壁面因局部缺陷而引起散射; 在此, 不认为刚性反射波是散射波。如此, 公式

(4) 和 (5) 所定义的 p_0 是入射声波 p_i 和无缺陷的刚性界面反射波 p_r 之和: $p_0 = p_i + p_r$ 。表面缺陷的散射声场 p_s 修改了刚性反射声场。一言以蔽之, p_0 是不存在散射体 (α, β 和 γ 悉为零, 即有效声源 $\mathbf{f}=\mathbf{0}, q=0, u=0$) 时的声场。它由入射波 p_i 及其诸界面上 (不被视为散射) 的反射而形成的总声场。因此, 只有在无界空间中才有 $p_0 = p_i$ 。

二、格林函数与积分方程

与处理辐射问题类似, 为了导出散射声场的积分表示, 引入辅助的格林函数 G , 满足方程

$$(\nabla^2 + k^2)G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (\mathbf{r}, \mathbf{r}_0 \in V) \quad (7)$$

它是声特征参数为 ρ_0 和 κ_0 的均匀媒质中的点声源所满足的方程。与方程 (3) 对应的边界条件为

$$\left(\frac{\partial}{\partial n} + jk\eta_0 \right) G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = 0, \quad (\mathbf{r} \in \Sigma) \quad (8)$$

可见, 如此定义的格林函数 G 是排除了散射物不存在 ($\mathbf{f}=\mathbf{0}, q=0, u=0$) 的有界空间点声源所辐射的声场。

用 $G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)$ 乘方程 (1) 左右两端, 用 $p(\mathbf{r})$ 乘以方程 (7) 两端, 两者相减后再对其作整个声场空间 V 的体积分, 并利用三维 δ 函数的积分性质和高斯定理, 得如下积分方程

$$\iint_{\Sigma + S_\infty} \left(G \frac{\partial p}{\partial n} - p \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS = p(\mathbf{r}_0) + \iiint_V [\nabla \cdot (\alpha \nabla p) + k^2 \beta p] G d\mathbf{r}$$

等式左边的面积分遍及边界 Σ 和无穷远边界 S_∞ 。 S_∞ 是包围声场空间的无穷远封闭表面 (例如, 半径为 $R=\infty$ 的球面)。根据边界条件 (3) 和 (8), 沿 Σ 的面积分

$$\iint_{\Sigma} \left(G \frac{\partial p}{\partial n} - p \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS = - \iint_{\Sigma} jk\gamma(\mathbf{r}) p(\mathbf{r}) G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) d\Sigma$$

而根据无穷远边界条件 (6), 无穷远边界 S_∞ (半径 $R=\infty$ 的球面) 上的积分。

$$\oint_{S_{\infty}} \left(G \frac{\partial p}{\partial n} - p \frac{\partial G}{\partial n} \right) d\mathbf{r} = \oint_{S_{\infty}} \left(G \frac{\partial p_0}{\partial n} - p_0 \frac{\partial G}{\partial n} \right) d\mathbf{r} = p_0(\mathbf{r}_0)$$

综上，再交换其中的 \mathbf{r} 和 \mathbf{r}_0 ，并利用格林函数的互易性 $G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = G(\mathbf{r}_0; \mathbf{r})$ ，最终得到如下声场积分方程：

$$\begin{aligned} p(\mathbf{r}) &= p_0(\mathbf{r}) \\ &- \iiint_V \left[\nabla \cdot (\alpha(\mathbf{r}_0) \nabla p(\mathbf{r}_0)) + k^2 \beta(\mathbf{r}_0) p(\mathbf{r}_0) \right] G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) d\mathbf{r}_0 \\ &- jk \iint_{\Sigma} \gamma p(\mathbf{r}_0) G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) d\mathbf{r}_0 \end{aligned} \quad (9)$$

此处特别使用积分元 $d\mathbf{r}_0$ 代替 dV 和 $d\Sigma$ ，以专示对空间变元 \mathbf{r}_0 的积分。公式

(9) 形式上给出了声场的积分解 $p = p_0 + p_s$ ，其中的散射声场 p_s 是由体积分和面积分给出的散射体 ($\alpha \neq 0, \beta \neq 0$) 和散射面 ($\gamma \neq 0$) 产生的 (二次辐射) 声场。

1、无界空间散射体

在无边界 Σ 的情形下，格林函数 G 等于自由空间的格林函数 g ，

$$g(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} e^{-jk|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \quad (10)$$

如是，则不仅公式 (9) 中的 $G = g$ ，且仅体积分存在。而根据分布积分法，其中的散度的积分

$$\begin{aligned} \iiint_V \nabla \cdot (\alpha \nabla p) g dV &= \iiint_V \left[\nabla \cdot (\alpha g \nabla p) - \alpha \nabla g \cdot \nabla p \right] dV \\ &= \oint_{S_{\infty}} \alpha g \nabla p \cdot d\mathbf{S}_{\infty} - \iiint_V \alpha \nabla g \cdot \nabla p dV \\ &\xrightarrow{\alpha|_{r \rightarrow \infty} = 0, g|_{r \rightarrow \infty} = 0} - \iiint_V \alpha \nabla g \cdot \nabla p dV \end{aligned}$$

而且，当散射体不存在时，空间声场就是入射声波，即 $p_0 = p_i$ 。结果，积分方程 (9) 简化为

$$p(\mathbf{r}) = p_i(\mathbf{r}) + \iiint_V \left[\alpha(\mathbf{r}_0) \nabla g(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \cdot \nabla p(\mathbf{r}_0) - k^2 \beta(\mathbf{r}_0) g(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) p(\mathbf{r}_0) \right] dV \quad (11)$$

体积分中的第一项相当于偶极子辐射的贡献，第二项相当于点声源 (单极子) 辐射的贡献。

如果散射体 V 是局部的，则可以考虑散射的远场分布。设坐标原点为散射物内。在远场，格林函数 (10) 可以近似为

$$g \approx \frac{1}{4\pi r} e^{-jk(r-\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}_0)}, \quad \nabla g \approx -\frac{jk}{4\pi r} e^{-jk(r-\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}_0)} \hat{\mathbf{r}}, \quad \left(\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r}, r = |\mathbf{r}| \right)$$

其中 $r = |\mathbf{r}|$ 是观察点到原点的距离， $\hat{\mathbf{r}}$ 是场点（观察点）方向的单位矢量。代入公式 (11)，得到散射声场的远场近似

$$p_s(\mathbf{r}) = p(\mathbf{r}) - p_i(\mathbf{r}) \approx p_{ia} \frac{e^{-jkr}}{r} \Theta(\theta) \quad (12)$$

式中 p_{ia} 是入射波的振幅，而 Θ 定义为

$$\Theta(\theta) \equiv \frac{jk}{4\pi p_{ia}} \iiint_V [jk\beta(\mathbf{r}_0)p(\mathbf{r}_0) - \alpha(\mathbf{r}_0)\nabla p(\mathbf{r}_0) \cdot \hat{\mathbf{r}}] e^{jk\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}_0} dV$$

它是观察点方向 $\hat{\mathbf{r}}$ 的极角 θ 函数，反映散射场的角分布，称为**角分布因子**【注2】。由此可求得远场散射声强，与平面波的公式形式一致。在弱散射的情形下，可以采用玻恩近似（参见后文），上列公式被积函数中的声压 p 可适用入射声压 p_i 取代，从而显式地算出角分布因子 Θ 。

2、有界空间散射面

另一方面，在仅有边界散射的情形下，公式 (9) 直接简化为

$$p(\mathbf{r}) = p_0(\mathbf{r}) - jk \iint_{\Sigma} \gamma p(\mathbf{r}_0) G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) d\mathbf{r}_0 \quad (13)$$

其中的格林函数 G 是有界空间的格林函数，由边值问题 (5-6) 确定。例如，刚性平面因局部缺陷而引起的散射，其格林函数可根据镜像效应由 g 得到。又例如，矩形房间的壁面开有窗户，引起房间内声场的散射，对应的格林函数 G 是无窗户矩形房间内单位源强的点源所辐射的声场。

三、近似方法——玻恩近似

无论积分方程 (9) 还是 (11)、(12) 和 (13)，都仅给出声场 p 的隐式解，唯极少情形能从中获得精确的显式解析解。退而求其次，人们乃求助于诸如变分或逐次近似等计算方法求解。最值得一提的是逐次近似方法，谓之**玻恩近似**。玻恩近似高效简洁，适于**弱散射**（ α 、 β 和 γ 皆不大）。弱散射指公式 (9) 给出的散射波 $p_s = p - p_0$ 相较于 p_0 是小量：

$$\left| \frac{p_s}{p_0} \right| = O(\varepsilon), \quad (0 < \varepsilon \ll 1)$$

其中 ε 是无量纲小参量。因此总声场可按如下级数展开

$$p(\mathbf{r}) = p_0(\mathbf{r}) + p_1(\mathbf{r}) + p_2(\mathbf{r}) + \dots, \quad \left(\left| \frac{p_{n+1}}{p_n} \right| = O(\varepsilon) \right)$$

其中的每级近似修正 p_n 相比其前级近似修正 p_{n-1} 都应该是小量。将此展式代入积分方程 (9) 左右两端的 p , 零等式左右同级近似的项相等, 则得到逐次逼近的近似序列

$$p_s(\mathbf{r}) \approx \sum_{m=1}^{n-1} p_m(\mathbf{r}) + p_n(\mathbf{r}), \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$p_n(\mathbf{r}) = - \iiint_V \left[\nabla \cdot (\alpha(\mathbf{r}_0) \nabla p_{n-1}(\mathbf{r}_0)) + k^2 \beta(\mathbf{r}_0) p_{n-1}(\mathbf{r}_0) \right] G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) d\mathbf{r}_0$$

$$- jk \iint_{\Sigma} \gamma p_{n-1}(\mathbf{r}_0) G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) d\mathbf{r}_0$$

如此重复, 以至满足精度 (序列收敛) 为止。

注释

【注 1】 公式 (1) 的推导过程中假定了连续不均匀性是散射之因。如果不把某些连续不均匀视为散射体, 则情形有所不同。例如, 深海沿深度方向海水密度是连续不均匀的。在考察诸如鱼类、潜艇等对水声的散射时, 往往不把海水密度的不均匀性视为散射体。所以, 无散射物存在时的声压 p_0 满足连续不均匀媒质的声波方程

$$\rho_0 \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_0} \nabla p_0 \right) + k^2 p_0 = 0, \quad \left(k = k(\mathbf{r}) = \frac{\omega}{c_0(\mathbf{r})} \right)$$

其中的密度 ρ_0 、声速 c_0 、因此波数 k 等皆可能是空间 \mathbf{r} 的连续函数: $\rho_0 = \rho_0(\mathbf{r})$, $c_0 = c_0(\mathbf{r})$, $k = k(\mathbf{r})$ 。不难证明, 散射物存在时的声场 p 所满足的波动方程可以写成与方程 (1) 对应的形式:

$$\rho_0 \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_0} \nabla p \right) + k^2 p = \rho_0 \nabla \cdot \left(\frac{\alpha}{\rho_0} \nabla p \right) + k^2 \beta p$$

其中 α 和 β 的定义同公式 (2)。当然第二节的处理方法也可以照搬。

【注 2】 在光学、量子力学中被称为散射振幅 (scattering amplitude)。

引自 <http://xlwangnu.blog.163.com/blog/static/190719270201210170148738/>

一维声散射论

On one-dimensional acoustic scattering

南京大學聲學研究所 王新龍

【摘要】 声反射与透射属于广义声散射范畴，为声波最常见现象之一。本文研讨一维声散射的一般性问题，即声波在多层不均匀媒质内传播的普遍规律。从无穷远处入射的声波在此分层媒质中将经历复杂的反射与透射过程，最终部分声能返回入射方向，部分则透过多层媒质成为透射波。文章先构造适合于多层不均匀媒质声场的特殊朗斯基行列式，以刻画一维声场的数学特征。然后根据不均匀媒质声波方程和边界条件建立一维声场的普遍联系，特别是反射和透射系数之间的普适关系。最后，提出了解决反射透射问题的四端电网类比方法。

一、朗斯基行列式及其性质

一维不均匀流体媒质的静态密度 ρ 和声速 c 是一维空间坐标 x 的连续函数：

$$\rho = \rho(x), c = c(x), \quad (-\infty < x < +\infty)$$

在理想媒质中，频率 ω 的谐波声压 p 遵循非均匀媒质声波方程

$$\rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + k^2 p = 0, \quad (-\infty < x < \infty) \quad (1)$$

式中 $k = \omega/c$ 是波数。对应的流体质点振速 u 由如下公式给出

$$u = -\frac{1}{jk\rho c} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2)$$

方程（1）是二阶变系数常微分方程，其解依赖于无穷远（ $x = \pm\infty$ ）边界条件。虽然声速 c 也可能非常数，但经适当变换【注1】，方程（1）和公式（2）中的声速 c 可按常数处理。故下文一概假定 c （因而 k 也）是与 x 无关的常数。

借助于变换

$$p(x) = \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} \tilde{p}(x)$$

二阶常微分方程（1）可变换为

$$\frac{d^2 \tilde{p}}{dx^2} + [k^2 - \mu(x)] \tilde{p} = 0, \quad \left(\mu \equiv \sqrt{\rho} \frac{d^2}{dx^2} \frac{1}{\sqrt{\rho}} \right) \quad (1a)$$

其中，参变函数 μ 衡量媒质的不均匀性，类比于量子力学中的散射“势”函数 $\mu = \mu(x)$ 。

设 q 是方程 (1) 满足的另一个声压解， v 是对应的流体速度。对任意两个声场解 (p, u) 和 (q, v) ，我们定义朗斯基行列式：

$$W(p, q) = \det \begin{pmatrix} p & q \\ u & v \end{pmatrix} = \frac{1}{jk\rho c} \left(q \frac{\partial p}{\partial x} - p \frac{\partial q}{\partial x} \right) \quad (3)$$

与通常定义略有不同，此处的朗斯基行列式 W 存在一个与 x 有关的因子 $(1/j\omega\rho)$ 。惟其如此， W 在声学性质突变的边界上是连续的，因为边界两侧的声压和流体速度连续。根据 p 和 q 所满足的波动方程 (1)，不难证明

$$\frac{\partial}{\partial x} W(p, q) = 0 \quad (4a)$$

即，任意两个声场解的朗斯基行列式 W 在连续不均匀媒质内是与空间无关的常数。又 W 在边界上连续，故此结论在整个声场空间内成立，特别有，

$$W(p, q)|_{x=-\infty} = W(p, q)|_{x=+\infty} \quad (4b)$$

二、声场解分析，反射系数和透射系数

本文假定，在足够远处 ($|x| \rightarrow \infty$) 媒质的声学性质趋于均匀，

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \rho c = \rho_{\infty} c = Z_{\infty}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \rho c = \rho_{-\infty} c = Z_{-\infty}$$

式中， $Z_{\pm\infty}$ 是无穷远处的媒质声特性阻抗率。如此，方程 (1) 若 $k^2 > 0$ 必存在具有如下远场渐近形式的线性独立解：

$$p \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} e^{\pm jkx}$$

下文约定，声场的时间因子取 $\exp(-j\omega t)$ ，故 $\exp(jkx)$ 是 x 轴正向传播的声波空间因子， $\exp(-jkx)$ 是 x 轴负向传播的声波空间因子。设 φ 和 ψ 是分别满足方程 (1) 的两个线性独立声压解， $\varphi = \varphi(x, k)$ ， $\psi = \psi(x, k)$ ，分别具有如下的渐近形式

$$\begin{aligned} \varphi(x, k) &\rightarrow e^{jkx}, \quad (x \rightarrow -\infty) \\ \psi(x, k) &\rightarrow e^{jkx}, \quad (x \rightarrow +\infty) \end{aligned} \quad (5)$$

即， φ 是 $x \rightarrow -\infty$ 时沿 x 轴正向传播的单位振幅声压解， ψ 是 $x \rightarrow +\infty$ 时沿 x 轴正向传播的单位振幅声压解。因方程 (1) 及有关的边界方程（由声压及质点速度

在边界上的连续性得出)的系数皆实数,解 φ 和 ψ 的复共轭(用右上星号*表示为) φ^* 和 ψ^* 亦方程(1)之解,具有渐近形式

$$\begin{aligned}\varphi^*(x, k) &\rightarrow e^{-jkx}, \quad (x \rightarrow -\infty) \\ \psi^*(x, k) &\rightarrow e^{-jkx}, \quad (x \rightarrow +\infty)\end{aligned}\quad (6)$$

根据解的唯一性,必有如下共轭对称关系:

$$\varphi(x, -k) = \varphi^*(x, k), \quad \psi(x, -k) = \psi^*(x, k) \quad (7)$$

根据常微分方程论,共轭解 φ 和 φ^* 构成方程(1)的线性独立解对, ψ 和 ψ^* 亦然。所以, ψ 和 ψ^* 可表为 φ 和 φ^* 之线性叠加:

$$\begin{aligned}\psi(x, k) &= a(k)\varphi(x, k) + b(k)\varphi^*(x, k) \\ \psi^*(x, k) &= b^*(k)\varphi(x, k) + a^*(k)\varphi^*(x, k)\end{aligned}\quad (8)$$

叠加系数 a 和 b 一般也是波数 k 的函数。从公式(7)可知, a 和 b 具有共轭对称性

$$a(-k) = a^*(k), \quad b(-k) = b^*(k)$$

根据渐近形式(5)和(6),公式(8)构造的基本解 ψ 具有渐近形式

$$\psi(x, k) \rightarrow \begin{cases} a(k)e^{jkx} + b(k)e^{-jkx}, & (x \rightarrow -\infty) \\ e^{jkx}, & (x \rightarrow +\infty) \end{cases} \quad (9)$$

此表明, ψ 是从左 ($x=-\infty$) 向右入射(正向入射)而在媒质中形成的声场,入射波幅为 a , 后向散射(反射)的波幅为 b , 而前向散射(透射)的波幅等于1。因此,正向入射的声压反射系数 r_+ 和透射系数 t_+ 分别为

$$r_+(k) = \frac{b(k)}{a(k)}, \quad t_+(k) = \frac{1}{a(k)} \quad (10)$$

下标"+"标记沿 x 轴从左至右的正向入射。利用渐近式(9),可求出 $W(\psi, \psi^*)$ 分别在 $x=\pm\infty$ 之值。根据朗斯基行列式的性质(4b)得到如下恒等式

$$|a|^2 - |b|^2 = \zeta \quad (11)$$

式中 ζ 是远场媒质声阻抗率之比:

$$\zeta \equiv \frac{Z_{-\infty}}{Z_{+\infty}}$$

用公式(10)给出的反射和透射系数表示,此恒等式为

$$|r_+|^2 + \zeta |t_+|^2 = 1$$

其中，等式左端第一项是声强的反射系数，第二项是声强的透射系数，所以此恒等式就是声能守恒方程。

公式（8）也可用简洁的矩阵表示

$$\begin{pmatrix} \psi \\ \psi^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & a^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi^* \end{pmatrix} \quad (12)$$

系数矩阵

$$\hat{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & a^* \end{pmatrix}, \quad \left[\det(\hat{\mathbf{T}}) = \zeta \right] \quad (12a)$$

称为跃迁矩阵（transition matrix），其逆

$$\hat{\mathbf{T}}^{-1} = \frac{1}{\zeta} \begin{pmatrix} a^* & -b \\ -b^* & a \end{pmatrix}, \quad \left[\det(\hat{\mathbf{T}}^{-1}) = \frac{1}{\zeta} \right] \quad (12b)$$

其中已经利用了恒等式（11）。据此逆矩阵， (φ, φ^*) 反过来可用 (ψ, ψ^*) 的叠加表示

$$\begin{aligned} \zeta \varphi(x, k) &= a^*(k) \psi(x, k) - b(k) \psi^*(x, k) \\ \zeta \varphi^*(x, k) &= a(k) \psi^*(x, k) - b^*(k) \psi(x, k) \end{aligned} \quad (13)$$

根据渐近公式（5）和（6）， φ 具有渐近形式：

$$\varphi^*(x, k) \rightarrow \begin{cases} \zeta^{-1} [a(k) e^{-jkx} - b^*(k) e^{jkx}], & (x \rightarrow +\infty) \\ e^{-jkx}, & (x \rightarrow -\infty) \end{cases} \quad (14)$$

可见， φ^* 是从 $x=+\infty$ 沿 x 轴从右至左反向入射的波所形成的声场，入射振幅为 ζa ，反射振幅为 $(-\zeta b^*)$ ，透射振幅为 1。所以，反向反射和透射系数分别为

$$r_-(k) = -\frac{b^*(k)}{a(k)}, \quad t_-(k) = \frac{\zeta}{a(k)} \quad (15)$$

比较公式（10）知，正反方向的反射系数 r_+ 和 r_- 的幅值相等，但存在确定的相位差：

$$\arg(r_-) = \pi - \arg(r_+) - 2 \arg(b), \quad \left[\arg(b) = -\arg(t_+) \right]$$

而透射系数存在极简单的关系：

$$t_- = \zeta t_+$$

如果散射物两侧媒质相同（ $\zeta=1$ ），则 $t_+=t_-$ 。此乃声场互易性的体现。

综上所述，已知系数 a 和 b ，可求出所有的反射和透射系数。从叠加公式 (8) 和 (13) 不难验证，

$$W(\psi, \varphi^*) = aW(\varphi, \varphi^*), \quad W(\psi, \varphi) = bW(\varphi^*, \varphi)$$

又根据朗斯基行列式的性质 (4b) 以及 φ 和 ψ 的渐近表达式 (5) 和 (6)，不难算出：

$$W(\varphi, \varphi^*) = \lim_{x \rightarrow -\infty} W(\varphi, \varphi^*) = \frac{2}{Z_{-\infty}}$$

$$W(\psi, \psi^*) = \lim_{x \rightarrow \infty} W(\psi, \psi^*) = \frac{2}{Z_{+\infty}}$$

因此，得到 a 和 b 用基本解的朗斯基行列式表示公式：

$$a = \frac{Z_{-\infty}}{2} W(\psi, \varphi^*), \quad b = \frac{Z_{-\infty}}{2} W(\varphi, \psi) \quad (16)$$

- 无反射情形

从公式 (10) 和 (15) 可知，无反射 ($r_+ = r_- = 0$) 的充分必要条件是

$$b(k) = 0$$

在此条件下，从公式 (16) 知必有 $W(\varphi^*, \psi) = 0$ ，即基本解 ψ 和 φ^* 是线性相关的。由公式 (8) 和 (13) 知， $\psi = a\varphi$ ， $\zeta\varphi = a^*\psi$ ，因此必有

$$|a(k)|^2 = \zeta \quad \longrightarrow \quad |t_+| = \frac{1}{\sqrt{\zeta}}, \quad |t_-| = \sqrt{\zeta}$$

虽然声压的透射系数不等于 1，但声强的透射系数恰等于 1，即声能全透射。此实即阻抗匹配而发生的共振全透射。

三、声场的任意解，散射矩阵与转移矩阵

从渐近形式 (9) 和 (14) 可见，基本解 ψ 和 φ^* 分别除以 a 和 ζa 得到单位振幅入射波的声压解 Ψ 和 Φ 。用反射和透射系数表示，则 Ψ 和 Φ 的渐近式为

$$\Psi(x, k) \rightarrow \begin{cases} e^{jkx} + r_+ e^{-jkx}, & (x \rightarrow -\infty) \\ t_+ e^{jkx}, & (x \rightarrow +\infty) \end{cases}$$

$$\Phi(x, k) \rightarrow \begin{cases} t_- e^{-jkx}, & (x \rightarrow -\infty) \\ e^{-jkx} + r_- e^{jkx}, & (x \rightarrow +\infty) \end{cases}$$

现设分别有从 $x=-\infty$ 而来的正向入射波和从 $x=+\infty$ 方向而来的反向入射波，入射声压振幅分别为 p_{i1} 和 p_{i2} 。根据线性系统论，其单独入射所形成的声场分别为 $p_1=p_{i1}\Psi(x,k)$ 和 $p_2=p_{i2}\Phi(x,k)$ 。若两者同时入射，则总声场 $p=p_1+p_2$ ，具有渐近形式

$$p(x,k) = \begin{cases} p_{i1} e^{jkx} + p_{r1} e^{-jkx}, & (x \rightarrow -\infty) \\ p_{i2} e^{-jkx} + p_{r2} e^{jkx}, & (x \rightarrow +\infty) \end{cases} \quad (17)$$

式中， p_{r1} 和 p_{r2} 是分别反射到 $x=-\infty$ 和 $x=+\infty$ 的有效反射振幅：

$$p_{r1} = r_+ p_{i1} + t_- p_{i2}$$

$$p_{r2} = r_- p_{i2} + t_+ p_{i1}$$

各自既包括直接反射的，也包括从对面透射而来的。上列线性代数方程可用散射矩阵方程表示

$$\begin{pmatrix} p_{r1} \\ p_{r2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_+ & t_- \\ t_+ & r_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{i1} \\ p_{i2} \end{pmatrix} \quad (18)$$

系数矩阵

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} r_+ & t_- \\ t_+ & r_- \end{pmatrix} = \frac{1}{a} \begin{pmatrix} b & \zeta \\ 1 & -b^* \end{pmatrix} \quad (19a)$$

称为**散射矩阵** (scattering matrix)。上式第二等式已经代入了公式 (10) 和 (15) 给出的反射透射系数。散射矩阵 \mathbf{S} 的行列式值 $\det(\mathbf{S}) = -b^*/b$ 。不难利用恒等式 (11) 验证，散射矩阵 \mathbf{S} 之逆是其共轭复数：

$$\mathbf{S}^{-1} = \begin{pmatrix} r_+^* & t_-^* \\ t_+^* & r_-^* \end{pmatrix} = \frac{1}{a^*} \begin{pmatrix} b^* & \zeta \\ 1 & -b \end{pmatrix} = \mathbf{S}^* \quad (19b)$$

如此，公式 (18) 表示的“输入-输出”关系反过来可表成如下的“输出-输入”关系：

$$\begin{pmatrix} p_{i1} \\ p_{i2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_+^* & t_-^* \\ t_+^* & r_-^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{r1} \\ p_{r2} \end{pmatrix}$$

它反映了入射和反射之间的共轭可逆性。值得注意的是，若散射体两侧媒质声学性质相同 ($\zeta=1$ 或 $z_{-\infty}=z_{+\infty}$)，则 \mathbf{S} 是酉矩阵，声场是互易的 ($t_+=t_-$)。公式 (18) 所描述的声场散射关系可类比于如下图一所示的四端网络，因而可以通过测量输入激励-输出响应的数据，完全确定散射数据 a 和 b 。

Acoustic Scattering Analogous to a 4-Terminals Network



图一、1D 声散射的四端网络类比

与公式 (18) 的散射矩阵表示有所不同的是所谓的**转移矩阵**表示。顾名思义，转移就是把散射媒质一侧的输入输出变换为另一侧的输入输出，而转移矩阵建立了这种声场转移关系。经简单代数运算，散射矩阵方程 (18) 易转换为如下的转移矩阵方程

$$\begin{pmatrix} P_{i1} \\ P_{r1} \end{pmatrix} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} P_{r2} \\ P_{i2} \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} P_{r2} \\ P_{i2} \end{pmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \begin{pmatrix} P_{i1} \\ P_{r1} \end{pmatrix} \quad (20)$$

其中系数矩阵

$$\mathbf{T} = \frac{1}{t_+} \begin{pmatrix} 1 & -r_- \\ r_+ & t_+ t_- - r_+ r_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b^* \\ b & a^* \end{pmatrix} \quad (22)$$

称为**转移矩阵** (transfer matrix)。上式最后的等式中，反射透射系数已经根据公式 (10) 和 (15) 用散射数据 a 和 b 取代。须留意的是转移公式 (20) 中 $\{P_{r2}, P_{i2}\}$ 的排列顺序，它考虑了行波的传播方向。

四、应用举例

- 声在突变界面上的反射与透射

考虑最简单的突变界面反射透射情形。设 $x < 0$ 是声特性阻抗率为 $z_1 = \rho_1 c_1$ 的均匀媒质， $x > 0$ 是声特性阻抗率为 $z_2 = \rho_2 c_2$ 的均匀媒质， $z_1 \neq z_2$ 。在本问题中， $z_{-\infty} = z_1$ ， $z_{+\infty} = z_2$ ，所以 $\zeta = z_1/z_2 \neq 1$ 。根据已有的声学理论，正反向的反射与透射系数为

$$r_+ = \frac{1 - \zeta}{1 + \zeta}, \quad t_+ = \frac{2}{1 + \zeta}, \quad r_- = \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}, \quad t_- = \frac{2\zeta}{1 + \zeta}$$

从公式 (10) 或 (15) 知，散射数据

$$a = \frac{1}{2}(1 + \zeta), \quad b = \frac{1}{2}(1 - \zeta)$$

可见，仅当 $\zeta=1$ 时， $b=0$ 而发生全透射。代入公式 (19a) 和 (22)，得到的散射矩阵 \mathbf{S} 和转移矩阵 \mathbf{T} ：

$$\mathbf{S} = \frac{1}{1+\zeta} \begin{pmatrix} 1-\zeta & 2\zeta \\ 2 & \zeta-1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+\zeta & 1-\zeta \\ 1-\zeta & 1+\zeta \end{pmatrix} \quad (23)$$

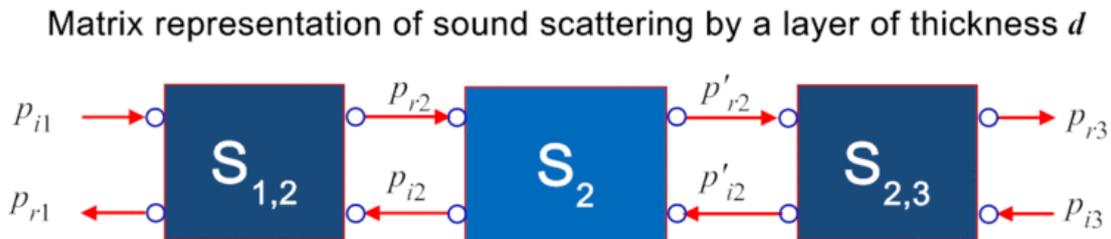
由于单界面的反射和透射系数皆为实数，故散射矩阵 \mathbf{S} 之逆等于其自身，即 $\mathbf{S} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{I}$ 。其实，此公式给出的散射矩阵和转移矩阵可描述任意声阻抗率突变界面的反射与透射问题。

- 声在匹配层上的反射与透射

设有均匀的中间匹配层位于 $0 < x < d$ ，其特性声阻抗率为 $z_2 = \rho_2 c_2$ 。匹配层之左 ($x < 0$) 是特性声阻抗率为 $z_1 = \rho_1 c_1$ 的均匀媒质，之右 ($x > 0$) 是声特性阻抗率为 $z_3 = \rho_3 c_3$ 的均匀媒质。显然，在本问题中， $z_{-\infty} = z_1$ ， $z_{+\infty} = z_3$ 。匹配层与左右媒质的两个边界可分别类比于四端网络，其散射矩阵分别记为 $\mathbf{S}_{1,2}$ 和 $\mathbf{S}_{2,3}$ （第一个下标记边界左侧的媒质“1”，第二个标记右侧的媒质“2”，下同）一如公式 (23)。匹配层本身类比于长度 d 的均匀传输线，行波在其中传播仅因行程而产生相位的变化。它也可等效于散射矩阵为 \mathbf{S}_{TL} 的四端网络：

$$\begin{pmatrix} p_{i2} \\ p'_{r2} \end{pmatrix} = \mathbf{S}_{TL} \begin{pmatrix} p_{r2} \\ p'_{i2} \end{pmatrix}, \quad \left[\mathbf{S}_{TL} = e^{jk_2 d} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

其输入 (p_{r2} , p'_{i2}) 分别来自左右边界的内向反射波，而输出 (p_{i2} , p'_{r2}) 实际上就是加上行程相位的内向反射波。结果，整个声反射和透射问题可用下图二所示的四端网络系统描述，它包括三个四端网络的子系统。



图二、中间层反射透射的四端网络描述

此系统当然可以等效为具有单一散射矩阵 \mathbf{S} 的四端网络系统。然而，试图直接从三个子四端网络计算等效的 \mathbf{S} 恐非易事。有效的方法是通过转移矩阵来计算。首先，把三个子四端网络的散射矩阵变换为转移矩阵， $\mathbf{S}_{1,2}$ 和 $\mathbf{S}_{2,3}$ 及其对应的转移矩阵 \mathbf{T}_{12} 和 \mathbf{T}_{23} 如公式 (23) 所示，惟其中的阻抗比 ζ 取值分别为 z_2/z_1 和 z_3/z_2 ，而 \mathbf{S}_{TL} 对应的转移矩阵公式和转移矩阵 \mathbf{T}_{TL} 为

$$\begin{pmatrix} p_{r2} \\ p_{i2} \end{pmatrix} = \mathbf{T}_{TL} \begin{pmatrix} p'_{r2} \\ p'_{i2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_{TL} = \begin{pmatrix} \exp(-jk_2 d) & 0 \\ 0 & \exp(jk_2 d) \end{pmatrix}$$

其次，由于转移矩阵方程的级联性，整个系统的关系为

$$\begin{pmatrix} p_{i1} \\ p_{r1} \end{pmatrix} = \mathbf{T}_{12} \begin{pmatrix} p_{r2} \\ p_{i2} \end{pmatrix} = \mathbf{T}_{12} \mathbf{T}_{TL} \begin{pmatrix} p'_{r2} \\ p'_{i2} \end{pmatrix} = \mathbf{T}_{12} \mathbf{T}_{TL} \mathbf{T}_{23} \begin{pmatrix} p_{r3} \\ p_{i3} \end{pmatrix}$$

所以，等效的转移矩阵是 $\mathbf{T}=\mathbf{T}_{12} \cdot \mathbf{T}_{TL} \cdot \mathbf{T}_{23}$ 。最后，对照公式 (22)，得到散射系数

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{z_1}{z_3} \right) \cos k_2 d - j \frac{1}{2} \left(\frac{z_2}{z_3} + \frac{z_1}{z_2} \right) \sin k_2 d \\ b = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{z_1}{z_3} \right) \cos k_2 d - j \frac{1}{2} \left(\frac{z_2}{z_3} - \frac{z_1}{z_2} \right) \sin k_2 d \end{cases}, \quad \left(k_2 = \frac{\omega}{c_2} \right) \quad (24)$$

由此，可从公式 (10) 和 (15) 得到所有的反射和透射系数。

前已经阐述，无反射的充要条件是 $b=0$ 。根据公式 (24)，对于当前的匹配问题，欲使 $a=0$ ，有两种可能：

$$z_1 = z_3, \quad \sin k_2 d = 0$$

或者

$$z_2^2 = z_1 z_3, \quad \cos k_2 d = 0$$

前者乃中间隔层的半波共振透射，后者即著名的四分之一波长阻抗匹配共振透射。

【注 1】定义新的坐标变量 x' ，

$$x' = \int_0^x \frac{c_0}{c(x)} dx, \quad \rho' = \rho \frac{c}{c_0}$$

式中 c_0 是某参考声速，可按方便选取。新坐标 x' 是对原坐标 x 空间的伸缩。在新坐标系中，声速皆变换为 c_0 ，而方程 (1) 和 (2) 具有如下形式

$$\rho' \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{1}{\rho'} \frac{\partial p}{\partial x'} \right) + k^2 p = 0$$

$$u = - \frac{1}{jk \rho' c_0} \frac{\partial p}{\partial x'}$$

如此定义的波数 $k=\omega/c_0$ 是与坐标无关的常数。所以，声速的不均匀性可以等效为密度的不均匀性。因此，在处理不均匀媒质问题时，仅考虑密度的不均匀性足矣。

第八章 室内声场

第九章 声波的吸收

引自: <http://xlwangnu.blog.163.com/blog/static/190719270201110124849705/>

流体的黏性与声吸收

Viscosity and sound absorption in fluids

南京大学声学研究所 王新龍

实际流体存在黏性并产生黏滯力，与导热并为声能耗散之因。黏滯力与流体的应变率成正比。切变产生切向黏滯力，成为流体运动的内摩擦阻力；容变产生容变黏滯力，使流体的弹性压缩膨胀不可逆。黏滯不仅造成声能被媒质吸收，也引起某种程度的声频散效应。本文概述流体的黏滯力与应变率的本构关系，及由此导出的黏性流体声波方程，然后简论黏滯所引起的频散与吸收效应。

声吸收是媒质固有的能量损失机制，直接导致声波的耗散。声吸收之因是媒质固有的黏滯性和导热性。黏滯和导热是媒质微观分子无规运动的宏观表现，两者共同引起声的宏观机械能不可逆地转化为媒质的热能。寻常场合声的吸收比较微弱，在有限的时空范围内或许可以忽视不计。但是，能量的耗散是距离累积性的，长距传播的声波因耗散而导致的声能衰减依然可观。声的吸收又强烈地依赖于声波频率，频率越高，吸收越强烈。所以，超声波的吸收多十分显著，不能随便忽略，尤其在具有强烈吸收性的复杂媒质如生物组织中。此外，在某些特殊情形下，声吸收必须予以考虑。譬如，微孔管的切向黏滯特别强烈，声波易因强烈的吸收而迅速衰减。在边界突变附近，声波与不规整边界结构发生强烈的局部相互作用，会产生湍流等复杂振动，使得声能的耗损变得十分强烈。本文独论流体的黏滯效应所引起的耗散。至于热导引起的耗散，另当别论。

黏滯应力张量

流体有切变和容变两种黏性，产生切向和容变黏滯力。

- 切向黏滯

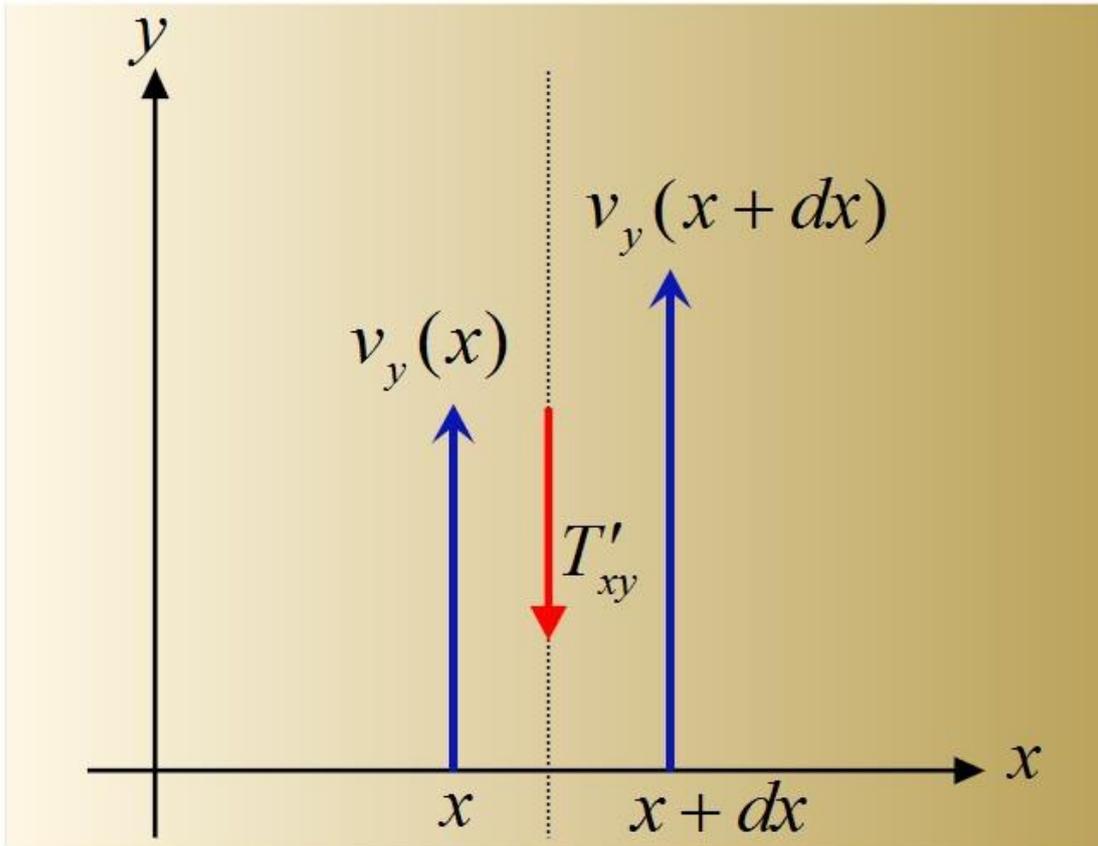
切变黏滯存在于有切向速度梯度之流体中，其因在於快慢不同的毗鄰流层间发生分子动量交换：慢分子扩散到快层，快分子扩散到慢层。为阐明之，特考察最简情形。设有沿 y 方向流动的流体，其速度 v_y 在垂直于流动的 x 方向不均匀，即速度的 y 方向分量 v_y 是 x 的函数： $v_y=v_y(x)$ ，如下图所示。切应变率

$$\partial_x v_y = \frac{\partial}{\partial x} v_y$$

描述 x 方向单位长度内 y 方向速度的变化程度。在任意与流动平行的 x 平面上，左侧流体对右侧流体单位面积上施加正比于切应变率的切向黏滞应力：

$$T'_{xy} = -\eta' \frac{\partial}{\partial x} v_y(x)$$

比例系数 η' 称为（切向）黏滞系数，负号表明黏滞力的方向与切应变率的方向相反。应力是单位面积上的力，单位与压强一致，用公制表示是：牛顿/平方米。由于应变率的量纲是时间的倒数，故黏滞系数的单位是：牛顿×秒/平方米。切黏滞应力 T'_{xy} 中的第一个下标 x 表示黏滞力的作用平面（ x 平面），第二个表示黏滞力的方向（ y 方向）。



流体沿 y 方向流动，其速度在 x 方向存在分布。

一般，切向黏滞力与速度矢量 $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ 的梯度

$$\nabla \mathbf{v} = \{\partial_i v_j, i, j = x, y, z\}$$

有关。速度的梯度构成应变率张量或矩阵。然而，并非速度梯度的所有分量尽引起切黏滞。对这些分量作分解

$$\partial_i v_j = \frac{1}{2} (\partial_i v_j + \partial_j v_i) + \frac{1}{2} (\partial_i v_j - \partial_j v_i)$$

就不难看出，其中包含描述流体纯旋转的成份；例如，

$$\partial_x v_y - \partial_y v_x = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = (\nabla \times \mathbf{v})_z$$

是速度旋度的 z 分量。几何分析可以验证，速度旋度之半，

$$\bar{\boldsymbol{\Omega}} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v}$$

是流体的整体旋转角速度，无关于切向黏滞，必须在切应变率张量中排除。此外，速度散度 $\text{div}(\mathbf{v})$ 表示流体的压缩膨胀体波变化率，对切向黏滞也无贡献，也应从切应变率张量中排除。排除了这些成分之后得到的纯切应变率张量为

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \sum_{i,j=(x,y,z)} U_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \\ U_{ij} &= U_{ji} = \frac{1}{2} (\partial_j v_i + \partial_i v_j) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (i, j = x, y, z) \\ \left(\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \right) \end{aligned}$$

注意， $U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} = 0$ ，恰好排除了体应变的贡献。切黏滞应力是一个张量，并且应变率张量成正比，

$$\mathbf{T}' = -2\eta' \mathbf{U} \quad (1)$$

或者，用矩阵表示：

$$\begin{pmatrix} T'_{xx} & T'_{xy} & T'_{xz} \\ T'_{yx} & T'_{yy} & T'_{yz} \\ T'_{zx} & T'_{zy} & T'_{zz} \end{pmatrix} = -2\eta' \begin{pmatrix} U_{xx} & U_{xy} & U_{xz} \\ U_{yx} & U_{yy} & U_{yz} \\ U_{zx} & U_{zy} & U_{zz} \end{pmatrix}$$

因 \mathbf{U} 对称，切黏滞应力矩阵 \mathbf{T}' 也对称。

• 容变黏滞

容变黏滞极类于作用于弹簧振子上的摩擦，或者漏气的轮胎，它使流体的压缩膨胀过程不可逆。容变黏滞产生的原因是在压缩膨胀过程中声的平动机械能转化为分子内部其它自由度的内能，如双原子分子作相对振动的自由度。单原子分子气体的容变黏滞可以忽略。与切变黏滞不同，容变黏滞应力正比压缩膨胀率 $\nabla \cdot \mathbf{v}$ ，方向垂直于流体界面。数学上，可用三个应力分量描述容变黏滞应力：

$$T'_{ii} = -\eta'' \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (i = x, y, z) \quad (2)$$

比例系数 η'' 称为容变黏滞系数。例如, T''_{xx} 是作用在 x 平面单位面积上方向沿 x 方向的容变粘滞力。容变黏滞是各向同性的, 所以容变黏滞应力与作用面的方向无关, 响应的矩阵是对角的。

• 黏滞应力张量与黏滞力

综合公式 (1) 和 (2), 得总的黏滞应力张量与应变率的关系

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathbf{T}' + \mathbf{T}'' = \sum_{i,j=x,y,z} T_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \\ T_{ij} &= -\eta' \left(\partial_j v_i + \partial_i v_j - \frac{2}{3} \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{v} \right) - \eta'' \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{v} \\ &= \begin{cases} -2\eta' \partial_i v_i - \left(\eta'' - \frac{2}{3} \eta' \right) \nabla \cdot \mathbf{v}, & (i = j) \\ -\eta' (\partial_j v_i + \partial_i v_j), & (i \neq j) \end{cases} \end{aligned} \tag{3}$$

用矩阵表示

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} T_{xy} = T_{yx} \\ T_{xz} = T_{zx} \\ T_{yz} = T_{zy} \end{pmatrix}$$

它在 x 平面上的三个分量是 $\mathbf{T}_x = (T_{xx}, T_{xy}, T_{xz})$ 就是该平面上单位面积的粘滞力, 如下图所示。可见, 总黏滞力的方向既不垂直于平面, 也不与平面相切。

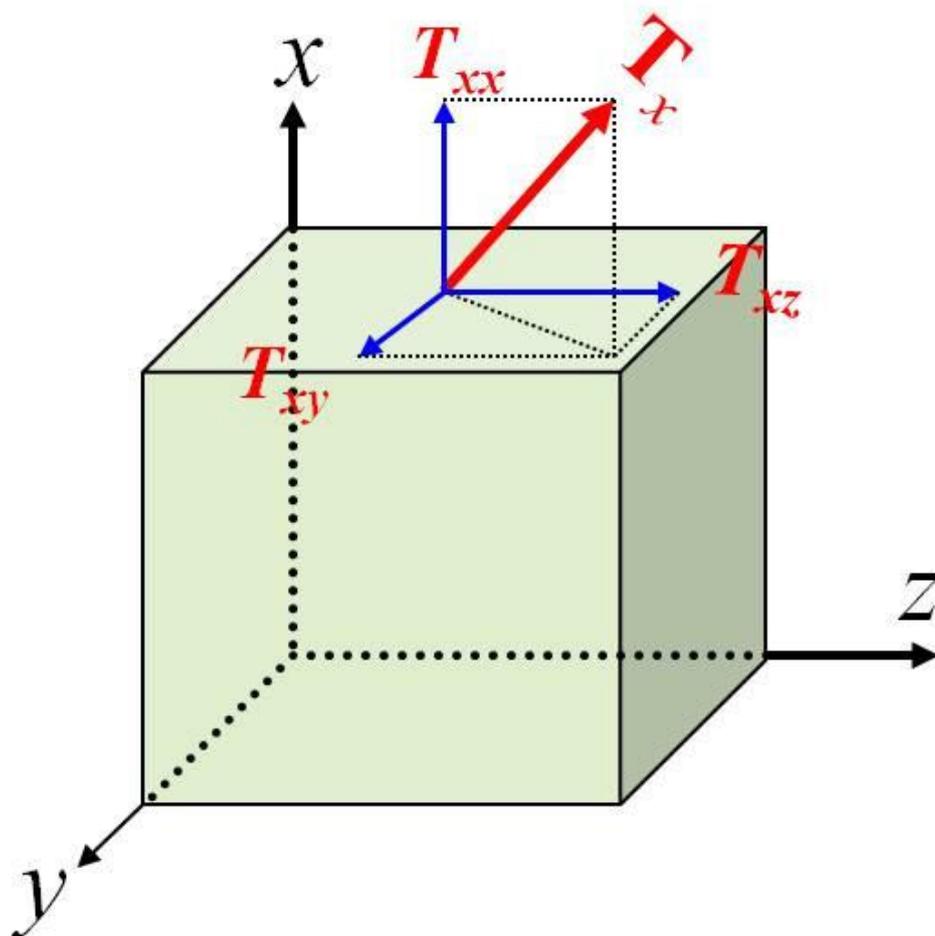
\mathbf{T}_x 可以表为张量 \mathbf{T} 与 x 方向单位矢量 $\mathbf{e}_x = (1,0,0)$ 的点积

$$\mathbf{T}_x = \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_x$$

或者, 用矩阵运算表示

$$\mathbf{T}_x = \begin{pmatrix} T_{xx} \\ T_{xy} \\ T_{xz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

同理, 可以得到作用在 y 和 z 方向平面上的黏滞力 \mathbf{T}_y 和 \mathbf{T}_z 。



作用在 x 平面上的黏滯力 \mathbf{T}_x 及其分量 T_{xx} , T_{xy} , T_{xz}

一般而言，流体内方向单位矢量 \mathbf{n} 的面积元 dS 受到的黏滯力可以表为

$$d\mathbf{F}_\eta = \mathbf{T} \cdot (\mathbf{n}dS) = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}dS = \mathbf{T}_n dS$$

所以方向为 \mathbf{n} 的单位面积受到的黏滯力为

$$\mathbf{T}_n = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}$$

是黏滯应力张量 \mathbf{T} 与作用面方向矢量 \mathbf{n} 的点积。当然，上式右端也可以表成 \mathbf{T} 矩阵与 \mathbf{n} 是矢量的乘积。

Navior-Stokes 方程

体积为 V 的流体，除受到表面流压 P 之外，还受到表面黏滯力，

$$\oiint \mathbf{T}_n dS = \oiint \mathbf{T} \cdot (\mathbf{n} dS) = \iiint \nabla \cdot \mathbf{T} dV$$

其中用到了封闭曲面张量面积分的高斯定理。可见，单位体积的流体受到的黏滯力为

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_\eta &= \nabla \cdot \mathbf{T} = -\eta' \nabla^2 \mathbf{v} - \left(\frac{\eta'}{3} + \eta'' \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) \\ &= \eta' \nabla \times \nabla \times \mathbf{v} - \left(\frac{4}{3} \eta' + \eta'' \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) \\ &\quad \left[\nabla^2 \mathbf{v} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{v} \right] \end{aligned}$$

其中最後等式利用了方括号中的矢量运算关系。根据牛顿定律，密度为 ρ 的流体质点的运动方程为

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla P - \mathbf{f}_\eta = -\nabla (P - \eta' \nabla \cdot \mathbf{v}) - \eta' \nabla \times \nabla \times \mathbf{v}, \quad \left(\eta \equiv \frac{4}{3} \eta' + \eta'' \right) \quad (4)$$

此即奈维尔-斯托克斯 (**Navier-Stokes**) 方程，以取代理想流体的欧拉方程，其中的黏滯系数 η 既含容变黏滯又含切变黏滯。

对于不可压缩的流体， $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ 。方程 (4) 遂简化为

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla P + \eta' \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (\nabla \times \nabla \times \mathbf{v} = -\nabla^2 \mathbf{v})$$

此即黏性不可压缩流体的运动方程。不可压缩流体中，惟切变黏滯起作用

【1】。对于诸如水等液体，其运动本质上是不可压缩的，可用此方程描述。但是，对于声波而言，媒质是可压缩的，速度散度非零，故须采用方程 (4)

【2】。

黏性流体的声波方程

在小振幅声波情形下，时间全导数可用偏导数近似，奈维尔-斯托克斯方程

(4) 因此直接线性化为 **【2】**

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla (p - \eta' \nabla \cdot \mathbf{v}) - \eta' \nabla \times \nabla \times \mathbf{v} \quad (5)$$

式中 ρ_0 为非扰动态的密度。从此方程立即可知，质点速度的旋度不为零，故而黏性流体的声波运动不再无旋。开篇已申明，本文不考虑声波过程中因热导而引起的耗散效应。故而，仍假定绝热状态方程

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\kappa_s \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (6)$$

成立，其中 κ_s 为绝热弹性模量。方程 (5) 和 (6) 构成黏性流体声波运动的基本方程组。

• 无旋和无散分量

根据矢量论，任何矢量皆可分解为无旋分量和无散（有旋）分量之和。对流体速度矢量 \mathbf{v} 作此分解

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_L + \mathbf{v}_T$$

\mathbf{v}_L 为无旋振速分量， \mathbf{v}_T 为无散度振速分量，即

$$\nabla \times \mathbf{v}_L = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{v}_T = 0$$

无旋分量是纵向（沿传播方向）的振动模式，无散分量是横向（与传播方向垂直）的振动模式。将此分解代入基本方程 (5) 和 (6)，则可分解为两组方程：无旋分量满足的方程

$$\begin{cases} \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}_L}{\partial t} = -\nabla(p - \eta \nabla \cdot \mathbf{v}_L) \\ \frac{\partial p}{\partial t} = -\kappa_s \nabla \cdot \mathbf{v}_L \end{cases} \quad (7)$$

和无散分量满足的方程

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}_T}{\partial t} = -\eta \nabla \times \nabla \times \mathbf{v}_T \quad (8)$$

乍视之，速度的无旋分量 \mathbf{v}_L 与无散分量 \mathbf{v}_T 不相关。然而，边界上因边界条件而使两者发生耦合。又从 (7) 可知，声压 p 仅与无旋分量 \mathbf{v}_L 发生直接联系。声压产生压缩膨胀，无关乎速度旋度，当然也无关乎切黏滞。

• 声压波方程与复体弹性模量

从无旋分量的方程 (7) 还可看出，黏滞相当于改变了声压：

$$p \rightarrow p' = p - \eta \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v}_L)$$

根据方程 (7) 的第二式，此等效声压 p' 与原声压 p 的关系又可表为，

$$\kappa_s p' = \hat{\kappa}_s p \quad (9)$$

并且服从等效的弹性关系

$$\frac{\partial p'}{\partial t} = -\hat{\kappa}_s \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (10)$$

其中，采用了**体弹性模量算符**

$$\hat{\kappa}_s = \kappa_s + \eta \frac{\partial}{\partial t} = \kappa_s \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right), \quad \left(\tau \equiv \frac{\eta}{\kappa_s} \right) \quad (11)$$

可见， p' 与 \mathbf{v}_L 服从与理想流体的 p 与 \mathbf{v} 形式完全相同的基本方程组。结果， p' 的波动方程也与理想流体的形式相同：

$$\rho_0 \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \hat{\kappa}_s \nabla^2 p' = 0$$

又根据已给出的 p' 与 p 之间的线性关系 (9)，实际声压 p 的波动方程为

$$\rho_0 \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \hat{\kappa}_s \nabla^2 p = 0 \quad (12)$$

对于频率 ω 的谐波，公式 (9) 和 (10) 两式简化为

$$p = \frac{p'}{1 + j\omega\tau}, \quad p' = -\tilde{\kappa}_s \nabla \cdot \xi, \quad \left(\xi = \frac{\mathbf{v}}{j\omega} \right)$$

此时，取代体弹性模量算符的是**复体弹性模量**：

$$\tilde{\kappa}_s = \kappa_s + j\omega\eta = \kappa_s (1 + j\omega\tau) \quad (13)$$

据此，定义复声速和复波数：

$$\tilde{c}^2 = \frac{\tilde{\kappa}_s}{\rho_0}, \quad \tilde{k} = \frac{\omega}{\tilde{c}} \quad (14)$$

声波方程 (12) 因此可表为具有复数波数的亥姆霍兹方程，

$$\nabla^2 p + \tilde{k}^2 p = 0 \quad (15)$$

须指出，以上定义的新常数 τ 具时间量纲，为**黏滞弛豫时间**，约等于分子的平均碰撞时间，而 $\omega\tau$ 则衡量黏滞相对弹性之强弱。

复波数可分解为实部 k 和虚部 α_η ：

$$\tilde{k} = \frac{\omega}{\tilde{c}} = k - j\alpha_\eta, \quad k \equiv \frac{\omega}{c} \quad (16)$$

如此，方程 (15) 的平面行波解为

$$p = p_a e^{j(\alpha x - \tilde{k}x)} = p_a e^{-\alpha_\eta x + j(\alpha x - kx)} \quad (17a)$$

可见，复波数的实部 k 为黏性流体中的实际波数，实量 $c = \omega/k$ 为黏性流体的相速度，而 α_η 则衡量黏滞声吸收的大小，谓之**声吸收系数**，单位奈贝/米

(Np/m)。因此，粘性流体中的声压波（包括无旋分量速度）是沿传播方向衰减的。

- 扩散波模式

横向分量 \mathbf{v}_T 所满足的方程 (8) 是扩散型的, 因此是一种扩散型的声波。为说明起见, 设有如下沿 x 方向传播、振速沿 y 方向的平面波横波形式:

$$\mathbf{v}_T = \left(0, v_{ia} e^{j(\omega t - \bar{k}x)}, 0 \right)$$

代入无散方程 (8), 得到如下频散关系及 (与公式 (16) 定义不同的) 复波数:

$$\bar{k}^2 + j \frac{\rho_0 \omega}{\eta'} = 0 \rightarrow \bar{k} = \frac{1-j}{b}$$

可见波数的实部与虚部量值相等, 其中常数

$$b \equiv \sqrt{\frac{2\eta'}{\rho_0 \omega}}$$

所以, \mathbf{v}_T 的 y 分量为

$$v_y = v_{ia} \exp \left[-\frac{x}{b} + j \left(\omega t - \frac{x}{b} \right) \right]$$

经过 b 长度之后, 声波几乎衰尽, 此扩散模式之谓也。一般而言, 此类模式仅存于边界附近厚度约 b 的空间范围。故 b 有**声黏滞层厚度**之谓。对于 $\omega/2\pi=1000$ 赫兹的频率, 在 20°C 温度下, 空气 $b \approx 0.07\text{mm}$, 水 $b \approx 0.018\text{mm}$ 。诚然, 满足边界条件的解决非如此简单, 有关详情参阅【2】。黏滞层厚度 b 之大小决定管中声波运动的特性, 是微孔管吸声论之基础【3】。

频散与声吸收

在远离边界或诸如局域湍流等异常区域, 扩散波消耗殆尽。故而声波的速度旋度多发生于近边界等局域。若所涉声场空间远离这些区域, 则方程 (5) 中与速度旋度有关的黏滞项可略而不计 (一维声波问题则根本不存在此项)。此时, 谐波声波完全由具有复波数的亥姆霍兹方程 (15) 支配。

根据 (13)、(14) 和 (16), 得到关于 k 和 α_η 的频散方程,

$$\left(\frac{\omega}{c} - j\alpha_\eta \right)^2 = \left(\frac{\omega}{c_0} \right)^2 \frac{1}{1 + j\omega\tau}, \quad \left(c_0 = \sqrt{\frac{\kappa_s}{\rho_0}} \right)$$

其中 c_0 是无黏声速。从中立即导出声速 c 与声吸收系数 α_η 的表达式:

$$\begin{aligned}
 c &= c_0 \sqrt{\frac{2(1+\omega^2\tau^2)}{1+\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}} = c_0 \left[1 + \frac{3}{8}\omega^2\tau^2 + O(\omega\tau)^4 \right] \\
 \alpha_\eta &= \frac{\omega}{c_0} \sqrt{\frac{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}-1}{2(1+\omega^2\tau^2)}} = \frac{\omega}{c_0} \left[\frac{1}{2}\omega\tau + O(\omega\tau)^3 \right]
 \end{aligned} \tag{18}$$

所以，黏性媒质的声速 c 和吸收系数 α_η 皆为频率 ω 的函数。声速 c 与频率 ω 有关的现象称为**频散效应**（或弥散效应，光学中称色散效应）。因此效应，初时一列由不同频率成份叠加而成的多频声波的形状随时间发生改变，不同频率成份相互散开分离。频散效应还使波包（由多频谐波构成）的传播速度异于相速度。波包传播速度即**群速度** c_g 由下列公式计算

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} = \left(\frac{dk}{d\omega} \right)^{-1} = \left(\frac{d}{d\omega} \frac{\omega}{c} \right)^{-1} = \frac{c}{1 - \frac{\omega}{c} \frac{dc}{d\omega}}$$

可见，因 $dc/d\omega \neq 0$ ， $c_g \neq c$ 。把公式（18）的 c 表达式代入，并作泰勒展开，得到

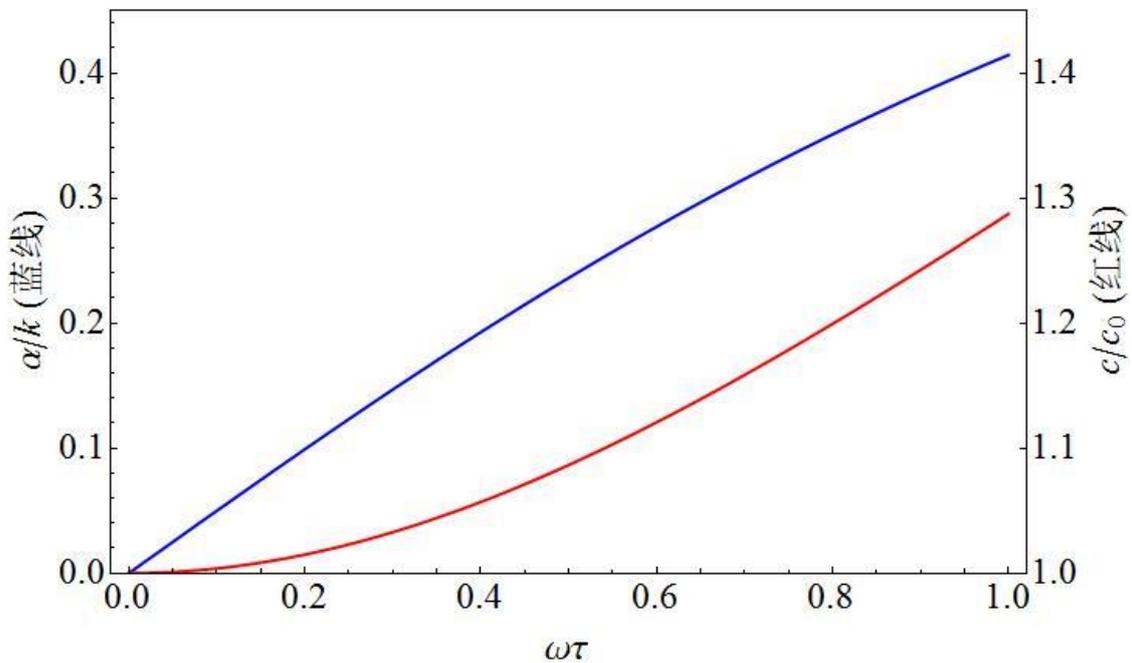
$$c_g = c_0 \left[1 + \frac{9}{8}\omega^2\tau^2 + O(\omega^2\tau^2) \right] \tag{19}$$

黏滞导致声沿传播方向的耗散性衰减。**声衰减系数**定义为传播单位距离后声压级的下降量，

$$\alpha = \frac{20\lg|p|_x - 20\lg|p|_{x+\Delta x}}{\Delta x} = (20\lg e)\alpha_\eta \approx 8.686\alpha_\eta \quad (\text{dB/m})$$

实际情形中，除声吸收引起的耗散性声衰减之外，尚有散射、波阵面扩展等非耗散性声衰减。

下图是根据公式（18）画出的声速 c （红线）与声吸收系数 α_η （蓝线）的频散曲线。



声吸收系数和声速的频散曲线

• 弱黏滞

从图可见，如果 $\omega\tau \ll 1$ ，黏滞引起的声速 c 的变化微乎其微，但声吸收系数 α_η 相对十分显著。气体 τ 的值在 10^{-10} 量级，绝大部分液体 τ 在 10^{-12} 量级，故而，一般满足弱黏滞 ($\omega\tau \ll 1$) 的条件，除非在高频超声段。在弱黏滞情形，(18) 和 (19) 式中保留 $O(\omega\tau)$ 一阶小量，近似为

$$c \approx c_g \approx c_0, \quad \alpha_\eta \approx \frac{1}{2} k \omega \tau = \frac{\omega^2 \eta}{2 \rho_0 c_0^3}$$

与上图的结果一致。吸收系数与频率的平方成正比，意味着高频声极易被媒质吸收，低频声波衰减很小，可播及遥远。

弛豫时间 τ 之倒数为弛豫频率。当声波频率几乎等于弛豫频率时，声波波长与分子平均自由程同量级，连续介质模型失效。故而，在连续介质模型成立之前提下，弱黏滞假设一般总成立。

参考书籍

- 【1】朗道《流体力学》第二章（中译本）
- 【2】P. M. Morse & K. Uno Ingard, *Theoretical Acoustics*, Princeton University Press.（中译本，1984年）
- 【3】马大猷《现代声学理论基础》，科学出版社 2004 年 3 月出版。

第十章 非线性声学基础

引自: <http://xlwangnu.blog.163.com/blog/static/190719270201252873330651/>

参量共振原理

Principle of parametric resonance

南京大學聲學研究所 王新龍 著

参量共振是因系统失稳而引起的振动或波动放大现象，广泛存在于日常生活及自然与工程科学诸领域，其最明显的特征是系统响应频率是驱动频率之半。与普通受迫系统不同，外力于参量系统是通过系统参数的周期变化而实现驱动——力学系统体现在诸如（时间）可变的弹性、惯性或负载，流体系统体现在重力的周期调制或者密度的周期起伏，诸如此类，不一而足。本文概述参量共振现象，分析其共振原理，并讨论其线性与非线性共振的特性。

在诸如弹簧-质点构成的受迫系统中，

$$x'' + 2\delta x' + \omega_0^2 x = F(t)$$

外力 $F(t)$ 直接作用于系统，使之产生受迫运动 $x(t)$ （文中，单撇“'”表示一阶导数，双撇“''”表示二阶导数）。在诸如此类系统中，阻尼（衰减）系数 δ 、固有频率 ω_0 等系统参数常被认为（或近似为）常数。如果 $F(t)$ 是简谐（周期）的，则当其频率 $\omega = \omega_0$ 时系统发生受迫共振。然而，也存在另一类系统，其外部驱动非直接加诸系统，而是通过改变系统参数（如上式的 δ 或 ω_0 ）而间接起作用。因此之故，支配这类系统的数学模型是形如

$$x'' + 2\delta(t)x' + \omega_0^2(t)x = 0 \quad (1)$$

的变系数微分方程。此类外部驱动被称为参量（参数）激励，对应的系统为参量（参数）激励系统，所产生的共振为参量共振。在动力学理论中，如此显式依赖时间的系统归类于非自治（non-autonomous）系统。

参量共振现象一瞥

参量共振现象时见日常生活，在自然与工程科学诸领域更不胜枚举。试举二三例抛砖引玉。

荡秋千：荡秋千为民之所好，尤为少年儿童所爱，由来尚矣。殊不知，秋千摆荡之理正参量共振焉。秋千（Swing, trapeze）其实不过一单摆，惟人在其上动作而略呈复杂而已。秋千来回摆荡一个周期 T ，人需要两次与秋千摆动位置协调的动作：下蹲和起立。下蹲应在秋千荡于高处（摆角 θ 大），起立应在秋

千摆荡于低处（摆角 θ 小）。就其物理实质而言，下蹲因人体质心下降而使有效摆长增长；起立因人体质心上升而使有效摆长缩短。如是，秋千摆长 l 是时变周期函数： $l=l(t)=l(t+T/2)$ ，其周期约为秋千摆荡周期 T 之半。根据力学的角动量定理，可导出秋千的摆荡方程：

$$\theta'' + 2\frac{l'}{l}\theta' + \frac{g}{l}\sin\theta = 0, \quad (l=l(t))$$

此乃参数（摆长 l ）可变的二阶非线性常微分方程，其第二项貌似阻力，但“阻尼系数” $\delta=l'/l$ ，周期可变，可正可负。负“阻尼”意味着有能量馈入系统。若摆角 θ 不大， $\sin\theta\approx\theta$ ，秋千方程遂线性化为标准型（1）。

支点垂直振动的单摆：经典力学中参量共振比比皆是，最简单者莫过于**支点作垂直周期振动**的单摆。设支点振动位移为 $-\zeta_0\cos\omega t$ ， ζ_0 为位移振幅。支点的垂直振动，单摆系统被施于加速度为 $a(t)=\omega^2\zeta_0\cos\omega t$ 的惯性力，等效为重力加速度 g 作周期地调制： $g(t)=g+a(t)$ 。所以，支点垂直振动单摆的运动可用如下模型描述：

$$\theta'' + (\omega_0^2 + \omega^2\gamma\cos\omega t)\sin\theta = 0, \quad \left(\omega_0^2 \equiv \frac{g}{l}, \gamma \equiv \frac{\zeta_0}{l} \right)$$

此亦参数（重力加速度 g ）可变的微分方程。式中 ω_0 是单摆线性自由振动的频率， γ 是支点位移振幅相对摆长的大小。若支点振动频率 ω 恰是单摆自由振动周期频率之倍 $2\omega_0$ ，则即使单摆原处 $\theta=0$ 的平衡位置，也会因微扰而渐放大大幅摆动。同样，若 θ 不大，此单摆方程亦可简化为标准形（1）。

法拉第波：日常担水者，无不有担水过程中桶内水波激荡四溅之经验，此正水波参量共振也。就物理本质言之，人担水行走，其肩有微小的上下周期起伏，至悬挂水桶的扁担两端有所放大（相位与肩相反）。结果，水桶整体作上下周期的振动，桶中之水所受的有效重力加速度被周期性地调制，极似上述垂直振动单摆。当人负担步行周期约为桶中水波振荡周期 T 之半，桶内水面突然失稳而起波澜。为避免之，经验丰富者只需在桶内置入少许如稻草类漂浮物即可。是以，水波参量共振对参数何其敏感！法拉第者，近代科学之大家也。其在电学、化学等诸多领域贡献卓著，众所周知。殊不知，法拉第也是最早对垂直振动水波激励进行观察和研究者，因此史称此类水波激荡现象为法拉第共振

（Faraday resonance），所激励之水波为法拉第波（Faraday waves）。设 Φ 为水速度势， P 为水压， ρ 为水密度，水容器的垂直振动位移为 $\zeta_0\cos\omega t$ ，（ ζ_0 为位移振幅），则容器的加速度为 $a(t)=-\omega^2\zeta_0\cos\omega t$ 为容器垂直振动加速度， (x,y,z) 为笛卡尔坐标系，其中 (x,y) 在静水面上， z 轴垂直于静水面向上。 Φ 遵从拉普拉斯方程： $\nabla^2\Phi=0$ （ ∇^2 —拉普拉斯算符），其在深为 d 的水中、波数为 k 的波动解为

$$\Phi(x, y, z, t) = \phi(x, y, t) \frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd}$$

在水面边界 $z=\zeta$ 上， Φ 须满足（法向速度连续的）运动学边界条件和（压强连续的）动力学边界条件，其线性化形式为：

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=0}, \quad \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{z=0} - \rho [g - a(t)] \zeta = P_0 \approx 0$$

式中 P_0 是水面大气压 (≈ 0)。把速度势 Φ 的形式解和 $a(t) = -\omega^2 \zeta_0 \cos \omega t$ 代入, 并消去速度势, 得到水位 ζ 的时间演化方程,

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + (\omega_0^2 + \gamma \omega^2 \cos \omega t) \zeta = 0, \quad (\omega_0^2 \equiv gk \tanh kd, \quad \gamma \equiv k \zeta_0 \tanh kd)$$

式中 ω_0 是浅水波的频率, γ 是反映驱动大小的无量纲量。此方程也是变系数微分方程 (1) 之特例。

参量放大器: 电路参量放大器是重要的电子电路之一。它一般由变容器 (variable capacitor) 和变容二极管 (varicaps diodes) 等电容参数可变的元件组成。电容的变直类比于力学系统中弹簧弹性系数的变化, 或者类比于上述支点垂直振动单摆与法拉第水波系统中重力加速度的变化。所以, 当这种变化的频率是系统固有频率的两倍时, 电路系统发生共振, 从而达到信号放大的目的。

线性参量共振

变系数微分方程 (1) 的“阻尼系数” $\delta(t)$ 一般可分为两部分: $\delta(t) = \delta + \delta_1(t)$, 其中 δ 是常数, 而 $\delta_1(t)$ 是时间有关的。通过对方程 (1) 作变换, 可把时变部分 $\delta_1(t)$ 归并于时变的频率参数 $\omega_0(t)$ 中, 参见《实用而简单的数学变换》)。因此, 下文假定方程 (1) 中的阻尼系数 δ 是常数。为更简明起见, 吾人不妨取

$$\omega_0^2(t) = \omega_0^2 + \omega^2 \gamma \cos \omega t, \quad (\gamma \geq 0)$$

其中, ω_0 是自由振动频率, ω 是参量驱动频率, γ 是 (无量纲的) 参量驱动强度 (不妨设为非负)。 γ 前引入因子 ω^2 纯粹是为后续公式整洁而已, 不过, 在诸如支点垂直振动单摆或法拉第垂直振动实验中, 如此定义的 γ 具有支点或水槽振动位移振幅之意。结果, 所要研究的简化参量共振数学模型为:

$$x'' + \alpha \omega x' + (\omega_0^2 + \omega^2 \gamma \cos \omega t) x = 0 \quad (2)$$

其中以无量纲的 $\alpha = 2\delta/\omega$ 取代了时不变的阻尼系数 δ 。阻尼通常与频率有关, 例如因空气粘滞而引起的阻尼系数 δ 与频率的平方成正比。所定义的 α 无疑减弱了对频率的依赖性。若 $\alpha = 0$, 此即著名的 **Mathieu 方程**。

欲定性理解参量共振, 不妨暂设 $\alpha = 0$ 并把方程 (2) 写成如下形式

$$x'' + \omega_0^2 x = -(\gamma \omega^2 \cos \omega t) x$$

方程右端可视为“外力” F , 所不同在于此“外力”正比系统响应位移 x 。设 $\omega \approx 2\omega_0$, 且存在初始微振动: $x = A \cos \omega_0 t$ 。根据三角函数的关系, 此“外力”含有差频和和频成份。差频近乎自由振动频率: $\omega - \omega_0 \approx \omega_0$, 引起微振动的共振放大。此放大的振动转而又增强驱动, 形成正“反馈”, 遂使放大愈烈。和频 ($\omega + \omega_0 \approx 3\omega_0$) 成份固然也会激起近乎 3 倍频的高次谐波, 唯其远离共振频

率，高次模式不会放大。可见，参量放大犹如水泵抽水，因而这种驱动源俗称**泵波**（pumping waves）。

很难对变系数常微分方程（2）求精确的解析解。一般总须对有关因素作符合实际的必要假定，然后获取近似或渐近解。本文假设

$$\alpha = O(\varepsilon), \quad \frac{1}{2}\omega = \omega_0 [1 + O(\varepsilon)], \quad \gamma = O(\varepsilon), \quad (0 < \varepsilon \ll 1) \quad (3)$$

此处， ε 是一个无量纲的小参量，表示量级的大小。此假设表明，驱动强度和阻尼系数皆为小量，而驱动频率之半近乎自由振动频率。若 $\varepsilon \rightarrow 0$ ，系统无阻尼、无驱动，故仅作频率 ω_0 的自由振动：

$$x(t) = \text{Re}(\psi e^{j\omega_0 t}) = \rho \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (\psi = \rho e^{j\varphi})$$

其复振幅 ψ 恒常，由初始条件确定。在 $0 < \varepsilon \ll 1$ 的情形下，满足条件（3）的阻尼和驱动所引起的效应，可视为对自由振动的微扰。因此有理由假定，振动模式仍粗具自由振动形式，

$$x(t) \approx \text{Re}(\psi e^{j\frac{1}{2}\omega t}) = \rho \cos(\frac{1}{2}\omega t + \varphi), \quad (\psi = \rho e^{j\varphi}) \quad (4)$$

只是用 $\omega/2$ 取代了 ω_0 ($\omega/2 \approx \omega_0$)，原因在于系统同步总使响应频率等于驱动频率。式中 ρ 和 φ 分别是复振幅 ψ 的幅值和相位，星号表示复共轭。诚如前述定性解释，解本应包含可能的高次谐波。惟高次谐波处于非共振态，其幅度肯定比（4）式给出的主模要小，故而在当下的近似中可弃之不顾。但是，因放大效应，复振幅 ψ 不复常数，而是时变的： $\psi = \psi(t)$ ，或者 $\rho = \rho(t)$ ， $\varphi = \varphi(t)$ 。虽然如此，仍有理由认为在满足条件（3）下， ψ 仅仅是时间的缓变函数，即

$$\frac{\psi'}{\psi} = O(\varepsilon), \quad \frac{\psi''}{\psi} = O(\varepsilon^2) \quad (5)$$

把试探解（4）代入微分方程（2），并把 $\cos(\omega t)$ 用指数函数表示，经归并整理得到如下方程，

$$\left(2\psi'' + 2\alpha\omega\psi' + 2j\omega\psi' + j\alpha\omega^2\psi + \left(2\alpha_0^2 - \frac{1}{2}\omega^2 \right) \psi + \gamma\omega^2\psi^* \right) e^{\frac{1}{2}j\omega t} + \gamma\omega^2\psi e^{\frac{3}{2}j\omega t} + \text{c.c.} \approx 0$$

其中星号表示复共轭。相较于简谐时间因子 $\exp(j\omega t/2)$ ，上式括号部分是时间的缓变函数，在 $\exp(j\omega t/2)$ 的一个周期内几乎不变。又 $\exp(j\omega t/2)$ 是线性独立变化的，故必等于零：

$$2\psi'' + 2\alpha\omega\psi' + 2j\omega\psi' + j\alpha\omega^2\psi + \left(2\alpha_0^2 - \frac{1}{2}\omega^2 \right) \psi + \gamma\omega^2\psi^* = 0$$

必须指出，不能直接对 $\exp(j3\omega t/2)$ 前的系数也作同样的操作。因为试探解（4）已经略去了 $3\omega/2$ 等高次谐波模式成份，因此前列方程有关 $3\omega/2$ 高次模式的项是不完全的。在当前的近似下，可以对 $\exp(j3\omega t/2)$ 等高次谐波视而不见，而不影响对以 $\omega/2$ 为频率的主模的分析。还可对所得到的方程作进一步简化。根据

假设 (3) 和 (5)，以上方程的前两项皆为 $O(\varepsilon^2)$ 高阶小量，尽可弃之。仅保留 $O(\varepsilon)$ 小量，于是得到复振幅 ψ 的时间演化方程：

$$j\left(\frac{2}{\omega}\psi' + \alpha\psi\right) - \beta\psi + \gamma\psi^* = 0 \quad (6)$$

称为复振幅方程，其中新引入的参数

$$\beta \equiv \frac{(\omega/2)^2 - \omega_0^2}{2(\omega/2)^2} \approx \frac{\frac{1}{2}\omega - \omega_0}{\omega_0} = O(\varepsilon) \quad (7)$$

是驱动失谐因子 β ，度量驱动频率之半 $\omega/2$ 偏离自由振动频率 ω_0 之程度。把 ψ 分解为实部 A 和虚部 B ，分离实部和虚部，则复振幅方程 (6) 可写成等价的一阶微分方程组

$$\xrightarrow{\psi=A+jB} \frac{2}{\omega} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha & \gamma + \beta \\ \gamma - \beta & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \quad (6a)$$

其系数行列式有一对本征值：

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}\omega\left(-\alpha \pm \sqrt{\gamma^2 - \beta^2}\right)$$

如果参数满足

$$\gamma^2 > \alpha^2 + \beta^2 \quad (8)$$

本征值之一为正， A 和 B 将随时间 t 指数增大，遂有 $x \rightarrow \infty$ —— **参量放大**；否则，两个本征值的实部全负， $x \rightarrow 0$ ，系统复归“0”状态 ($x=0$) —— **准静态**。公式 (8) 是参量共振的驱动参数条件。它表明，欲使共振发生，驱动强度 γ 不但要克服阻尼，尚须克服驱动频率的失谐 $\beta \neq 0$ 。

参数方程

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 \quad (9)$$

是准静态 ($x=0$) 稳定与否的分解线，其在 (γ, β) 驱动参数平面上构成了参量放大区域的边界线。在此边界线上，振幅 ψ 无关时间，处于**平衡态**，而解

(4) 是严格的简谐周期解，振荡频率为驱动频率之半 $\omega/2$ 。诚然，实验难以如此精准地控制参数，使 (9) 式得以严格满足。即便如此，振动亦近乎周期，至少在若干周期之内如此。令方程 (9) 左端的时间导数皆为零，得平衡态方程：

$$\gamma \cos 2\varphi_0 = \beta, \quad \gamma \sin 2\varphi_0 = \alpha$$

根据第二个方程得到两个 φ_0 解，分别对应 $\cos 2\varphi_0$ 取相反的符号，因此确定 β 的取值：

$$\begin{cases} \varphi_0 = \frac{1}{2} \sin^{-1} \left(\frac{\alpha}{\gamma} \right), & \beta = \sqrt{\gamma^2 - \alpha^2} \\ \varphi_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin^{-1} \left(\frac{\alpha}{\gamma} \right), & \beta = -\sqrt{\gamma^2 - \alpha^2} \end{cases} \quad (10)$$

说明 β 所正负号不同，平衡态相角 φ_0 也不同。乍视之，人或以为平衡态的幅值 $\rho=|\psi|$ 可取任意值，其实不然。

众所周知，只要有阻尼，线性受迫共振的振幅虽大但总是有限的。与此不同，无论阻尼存在与否，线性参量共振下振幅按指数放大以致无穷。实际很多参量共振系统，当然大多稳定在一个较大的振幅，作有限大振幅振动。是非线性而非阻尼制约了参量共振振幅的无限增长。所以，要研究大振幅运动，必须要在振动方程 (2) 中计及非线性。

非线性参量共振

作为对线性模型 (2) 的简单推广，以下研究变系数立方非线性微分方程

$$x'' + \alpha \omega x' + (\omega_0^2 + \omega^2 \gamma \cos \omega t)(x + \kappa x^3) = 0 \quad (11)$$

其中 κ 是立方非线性弹性系数，可正（硬弹簧）可负（软弹簧）。如果 $\alpha=0$ 、 $\gamma=0$ ，则问题退化为前文《非线性振子的自由振动》研究过的非线性自由振子。

复振幅方程

为求非线性模型方程 (11) 之解，除了假设 (3) 和 (5) 之外，尚需假设弱非线性：

$$\kappa = O(\varepsilon) \quad (12)$$

如此，则模型方程 (11) 的阻尼、驱动和非线性均在同一量级 $O(\varepsilon)$ 起作用，三者有可能达到动态平衡而使系统呈某种稳态振动。与推导出方程 (6) 完全类似，我们把试探解 (4) 代入方程 (11)，并根据假设 (3)、(5) 和 (12)，即可得到如下复振幅的方程

$$j \frac{2}{\omega} \frac{d\psi}{dt} + j\alpha\psi - \left(\beta - \frac{3}{8} \kappa |\psi|^2 \right) \psi + \gamma\psi^* = 0 \quad (13)$$

其中 β 的定义如公式 (7)。与方程 (6) 不同，非线性效应使得失谐因子作了修改： $\beta \rightarrow \beta - (3/8) \kappa |\psi|^2$ ，或者使共振频率有所增减。若令 $\psi(t) = \rho(t) \exp(j\varphi(t))$ ，则复振幅方程化为振幅 $\rho(t)$ 和相位 $\varphi(t)$ 的时间演化方程，

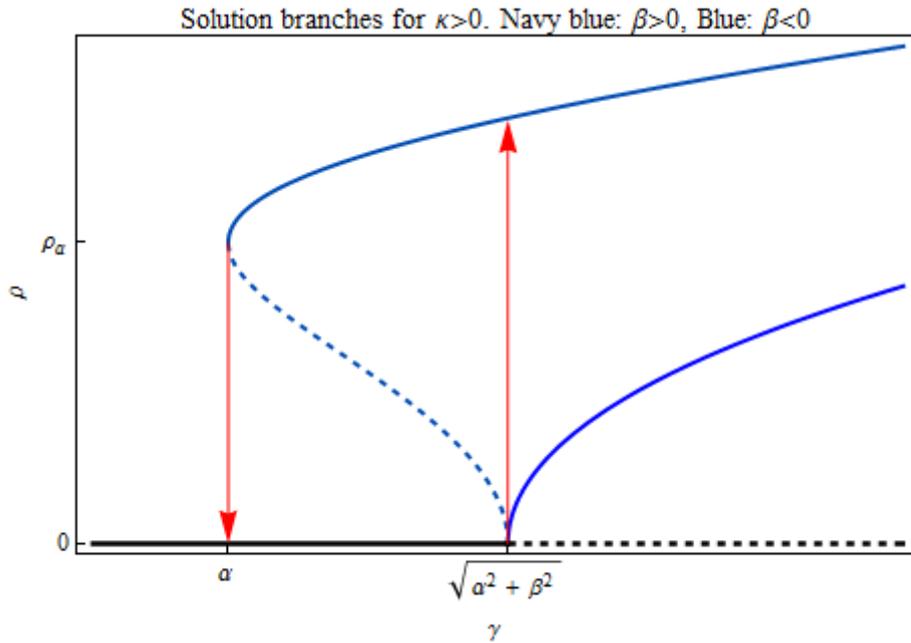
$$\begin{cases} 2\rho' = \omega(\gamma \sin 2\varphi - \alpha)\rho \\ 2\varphi' = \omega\left(\gamma \cos 2\varphi - \beta + \frac{3}{8}\kappa\rho^2\right) \end{cases} \quad (14)$$

平衡态及其多值性

平衡态指振幅 ψ 与时间无关的振动状态，此处特记为 ψ_0 。在方程 (14) 中令 $d\rho/dt=0$ 和 $d\varphi/dt=0$ ，得到平衡态所满足的方程，它具有两个不同性质的平衡态解，其一是准静态 ($\psi_0=0$)，其存在无关乎非线性。准静态通常被认为是平凡 (trivial) 解而不予重视，但在非线性系统中则不然。其二是有限振幅的非平凡解 $\psi_0 = \rho_0 \exp(j\varphi_0) \neq 0$ ，

$$\begin{cases} \rho_0^2 = \frac{8}{3} \cdot \frac{\beta - \gamma \cos 2\varphi_0}{\kappa} \\ \sin 2\varphi_0 = \frac{\alpha}{\gamma} \end{cases} \quad (15)$$

根据 (4)，有限振幅平衡态是位移 x 作严格周期振动的解。图一给出了硬弹簧振子 ($\kappa > 0$) 的平衡态振幅解 ρ_0 及其对驱动强度 γ 的依赖关系，粗黑线 (实线+虚线) 表示准静态解，蓝线表示 $\beta < 0$ 的有限振幅解，藏青色 (实线+虚线) 表示 $\beta > 0$ 的有限振幅解。软弹簧振子 ($\kappa < 0$) 的结果正好相反：**蓝色缺陷的 $\beta > 0$ 的解**，藏青色曲线 (实线+虚线) 是 $\beta < 0$ 的解。从公式 (15) 知，有限振幅平衡态的相位解与线性情形完全相同，分别是公式 (11) 给出的 $\cos 2\varphi_0 > 0$ 和 $\cos 2\varphi_0 < 0$ 两个解。与之对应，在 $\beta < 0$ 时仅存在一个 ($\cos 2\varphi_0 < 0$ 的) 幅度解 ρ_0 ，即图一的蓝色分支，仅当驱动强度 γ 满足 (8) 时才存在；而在 $\beta > 0$ 时则存在两个幅度 ρ_0 解，即图中的青色实线 ($\cos 2\varphi_0 < 0$) 和虚线 ($\cos 2\varphi_0 > 0$) 上下两个分支，前者可存在于 $\gamma > \alpha$ ，而后者仅存在于 $\alpha < \gamma < (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}$ 的有限区间。



图一、解分支：虚线是不稳定的解。红色箭头指示振幅跃迁的方向【 $\kappa < 0$ 之情形正好相反：蓝色对应 $\beta > 0$ ，青色对应 $\beta < 0$ 】。

与线性情形所不同，非线性平衡态解并非仅存于公式（9）所限定的一维参数曲线上。从方程（15）中消去相角，可得取代参数方程（9）的平衡态参数-幅度方程

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \left(\beta - \frac{3}{8} \kappa \rho_0^2 \right)^2 \quad (16)$$

更重要的是，非线性平衡态振幅 ρ_0 不但与驱动参数 (γ, β) 有关，而且与非线性弹性系数 κ 直接成反比：非线性愈大，振幅愈小。故而，仅有阻尼不足以遏制振幅的参量放大。制约参量放大者，非线性是也！

平衡态的稳定性与分岔

解的稳定性决定解是否物理可实现的，不稳定的解是无法在实验中维持其存在的。确定平衡态解是否稳定的数学方法是线性稳定性分析。对准静态 $\psi_0=0$ ，作微扰 $\delta\psi$ ，使得 $\psi=\psi_0+\delta\psi$ 。令 $\delta\psi=A+jB$ ，A 和 B 在此表示微扰的实部和虚部，且 $|A|\ll 1$ ， $|B|\ll 1$ 。把 ψ 代入复振幅方程（13），略去 A 和 B 的高阶小量 $o(A)$ 和 $o(B)$ ，仅保留 $O(A)$ 和 $O(B)$ 的一阶小量，所得到的微扰 (A, B) 的一对线性化方程即方程（6a）。因此，当参数满足条件（8）时， $\psi_0=0$ 的准静态失稳，微扰 A 和 B 指数放大——参量共振。对于有限振幅 ($\psi_0 \neq 0$) 的平衡态，设因微扰而使复振幅具有形式 $\psi=\psi_0(1+A+jB)$ ，其中 $A=A(t)$ 和 $B=B(t)$ 是微扰的实部和虚部。代入复振幅方程（13），并经类似的数学处理后，得到线性化的微扰方程

$$\frac{1}{\omega} \frac{dA}{dt} = \gamma \cos 2\varphi_0 B, \quad \frac{1}{\omega} \frac{dB}{dt} = -\alpha B + \frac{3}{8} \kappa \rho_0^2 A$$

其一对本征值是

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \omega \left[-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + \frac{3}{2} \rho_0^2 \gamma (\kappa \cos 2\varphi_0)} \right]$$

只要

$$\kappa \cos 2\varphi_0 < 0 \quad (17)$$

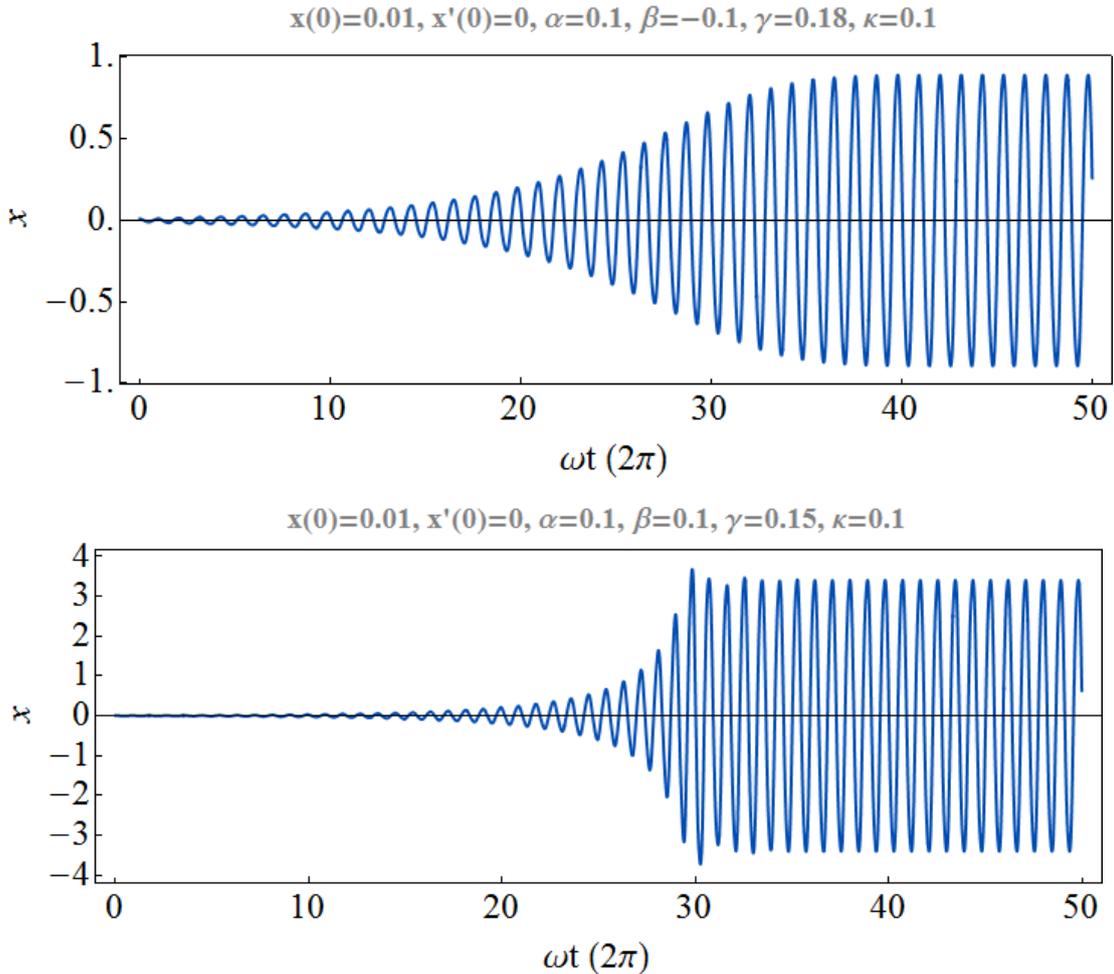
两个本征值的实部均负，所对应的有限振幅解稳定；否则具有一正一负的本征值，平衡态属于不稳定的鞍点。因此，对于硬弹簧（ $\kappa > 0$ ），公式（15）所给出的两个解中，只有 $\cos 2\varphi_0 < 0$ 的解是稳定。而对于软弹簧（ $\kappa < 0$ ）， $\cos 2\varphi_0 > 0$ 的解是稳定的。图一用虚线表示了不稳定的平衡态解 ψ_0 。

其实，图一也可视为非线性分岔图。所谓分岔（bifurcation），概指参数变化时系统平衡态稳定性或其它性质发生改变。分岔发生在平衡态本征值之实部过零之时；引起分岔的参数通称为分岔参数。从图一清晰可见，驱动强度 γ 作为分岔参数，当其增加到满足参数方程（9）之时，即在分岔点

$$\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

准静态（图一黑线）开始失稳（从黑实线变为黑虚线）而出现分岔。正因此分岔行为而发生了参量共振。系统的分岔行为当然还取决于其它参数如 β 。不失一般，下面仅讨论 $\kappa > 0$ 的硬弹簧情形，且永远假定阻尼 $\alpha > 0$ 。

超临界分岔（supercritical bifurcation）：对于 $\beta < 0$ 的情形，当驱动强度 γ 满足参量共振条件（8）时，系统从准静态分岔至蓝色曲线所表示的有限振幅解。此乃满足参量共振条件（8）下唯一稳定的解。在非线性动力论中，此种类型的分岔称为**超临界分岔**。图二是直接对方程（11）作数值模拟而得到的解。左图即是因超临界而导致的参量放大现象。

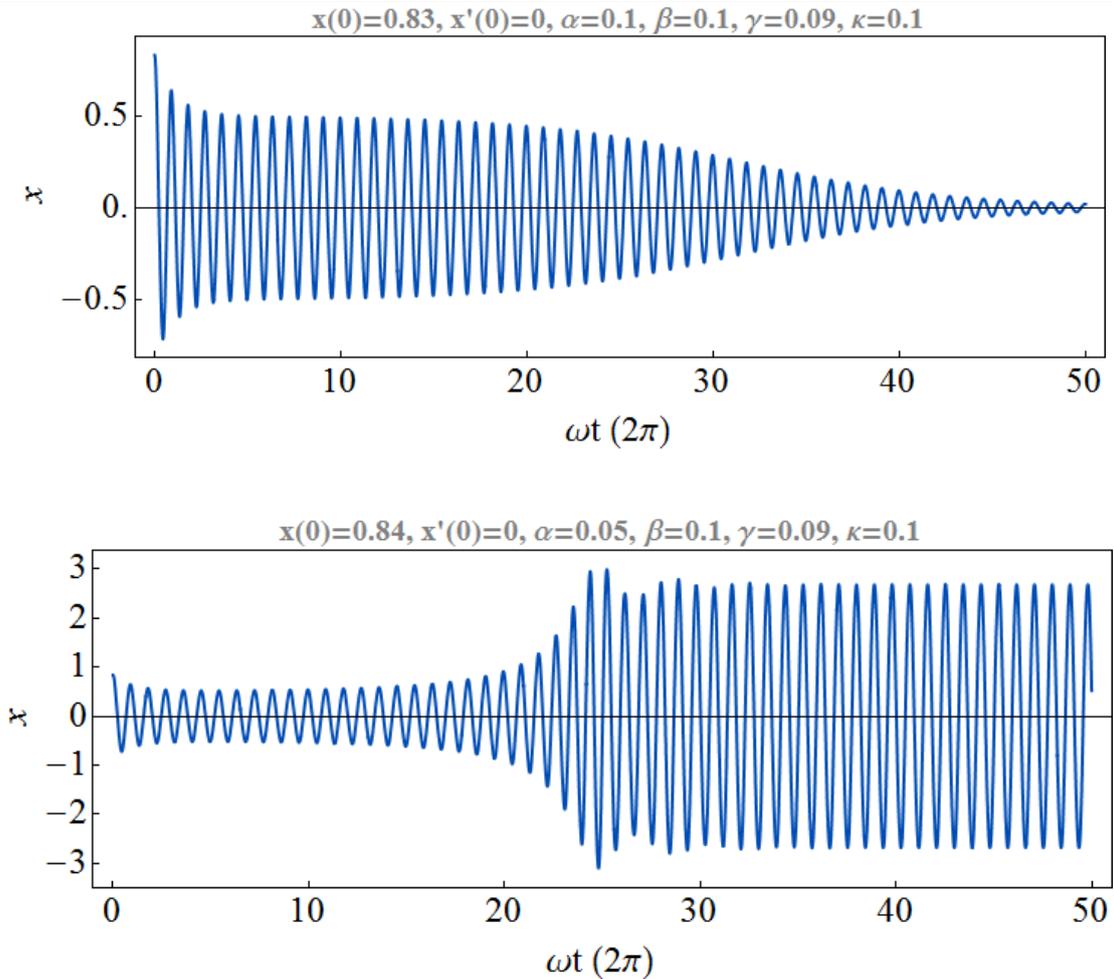


图二、左图：超临界分岔所致的参量共振；右图：亚临界所致参量共振

亚临界分岔 (subcritical bifurcation)：对于 $\beta > 0$ 的情形，有限振幅解（藏青色线）存在上下两分支（实线和虚线）。上分支（图一藏青色实线）对应 $\cos 2\varphi_0 < 0$ ，是稳定的。下分支（藏青色虚线） ρ 随 γ 的增加反而减小，不合常理。上述稳定性分析业已表明，此分支因对应 $\cos 2\varphi_0 > 0$ 而不稳定。一旦准静态满足条件（9）而失稳，系统当然不可能分岔而进入不稳定的下分支，而是直接跃迁到稳定的上分支，如图一红色向上箭头所指。这种分岔类型称为**亚临界分岔**。图二右图展示了此种情形下的参量共振放大情形。由图可见，因平衡位置失稳，极微之扰动会因参量共振而急遽放大，所以达到平衡态的时间极短。极为有趣的是，只要 $\gamma > \alpha$ ，上分支解一直存在。所以，在驱动强度区间

$$\alpha < \gamma < \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

之内，振子具有双稳态：准静态与有限振幅态。究竟取何种平衡态，当取决于初始条件。图三表明，初始位移 x 稍有不同，系统可能会演化至不同的平衡态。其实，在相空间内，每个平衡态各有其吸引域（basin of attraction）。只要初始条件位于吸引域之内，系统必然演化至该吸引域所属的平衡态。



图三、对初始条件的敏感性。左图：趋向准静态，右图：趋向有限振幅态。

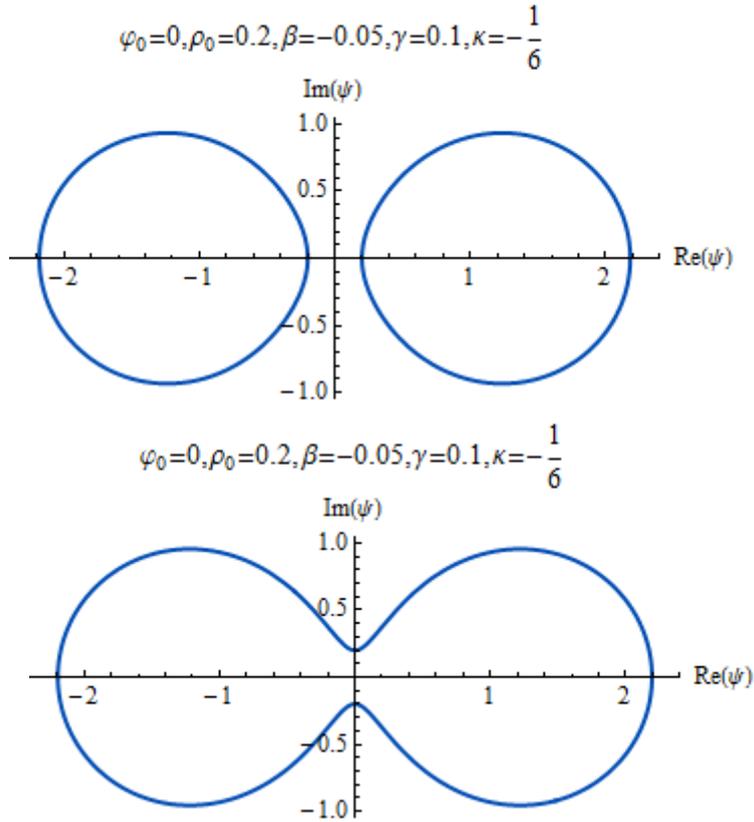
鞍节点分岔 (saddle-node bifurcation)：在 $\gamma=\alpha$ 处，稳定与不稳定的上下两分支汇合为一，发生所谓的鞍节点分岔。一旦 γ 减小到 $\gamma<\alpha$ ，参量激励输入的能量不足以抵消阻尼损耗，导致有限振幅态（上分支）失稳，系统突然止振而复归准静态，如图一向下红色箭头所指。值得注意的是在准静态，虽然 $\gamma<\alpha$ 时外部驱动依然存在，但系统无任何响应，而普通受迫系统则不然。

Hopf 分岔与准周期振动：从上所述知，无论初始状态如何，只要存在阻尼 α ，无论时间多久，系统终将趋于平衡态：要么准静态，要么作有限振幅的稳态周期振动。然而，对于理想的无阻尼系统 ($\alpha=0$)，结果有所不同。其时，满足条件 (17) (即 $\kappa\cos 2\varphi_0=\pm\kappa<0$) 的本征值是一对共轭虚数，意味着扰动不会衰减而具有振荡性。其实，无阻尼的复振幅方程 (14) 具有随时间周期变化的振幅解——**极限环 (limit circle)**。可以证明，此极限环在 ψ 复平面上的极坐标 (ρ, φ) 方程是

$$\frac{3\kappa}{16}(\rho^4 - \rho_0^4) = \rho^2(\beta - \gamma \cos 2\varphi) - \rho_0^2(\beta - \gamma \cos 2\varphi_0)$$

$$(\rho_0 = \rho|_{\varphi=\varphi_0})$$

这是 ψ 空间的闭合曲线方程，形状不但取决于驱动参数，而且与初始的振幅 $\psi(0)=\rho_0\exp(j\varphi_0)$ 之值密切相关，如图四所示。

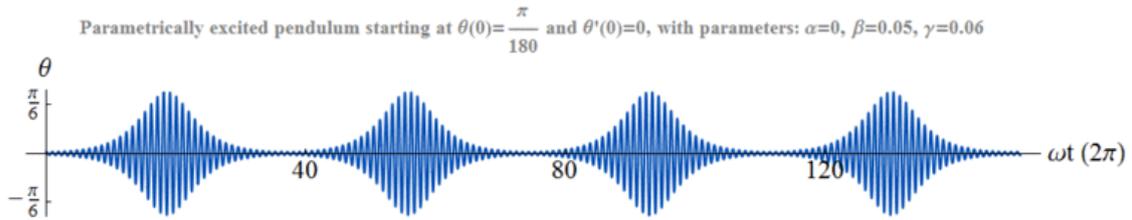


图四、不同初始振幅的极限环

极限环是 Hopf 分岔 (Hopf bifurcation) 的结果，其中阻尼系数 α 作为分岔参数。由于振幅是周期变化的 (当然是缓慢的)，振子的振动解 (4) 就是准周期的 (quasi-periodic) —— 振动具有两个不可约的频率。图五是对支点作垂直简谐振动的无阻尼单摆方程

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \alpha_0^2 (1 + \gamma \omega^2 \cos \omega t) \sin \theta = 0$$

的数值解，式中 θ 是单摆的摆角。如果对正弦函数作近似： $\sin(\theta) \approx \theta - (1/6)\theta^3$ ，则对应于模型方程 (11) 的 $\kappa = -1/6$ 。事实上，直接采用方程 (11) 作数值模拟，所得结果与图五所示相差无几，所以上述非线性理论仍然适用。如图所示，单摆的摆动被强烈地调制。虽然如此，调制周期仍远大于摆动周期，即振幅的变化是相对缓慢的，与此前的假设 (5) 符合。不同的初始条件， θ 的响应有所不同，不但摆幅范围有差，甚至调制深度与调制周期均与初始条件有关，此进一步说明了非线性振动的复杂多样性。即使存在即使是极微弱的阻尼 $\alpha \ll 1$ ，上述复振幅的极限环运动就变得不稳定而不断收缩，最终趋近于平衡态。体现在参量激励单摆中，就是调制深度随时间变浅，调制周期变短，最后变成无调制的稳态周期运动。



图五、支点作垂直振动的单摆运动。

结论

综上所述，参量共振异于受迫共振主要体现在：

(一) **响应频率是驱动频率 ω 的一半**。这是一种分频次谐波现象。虽然次谐波现象广泛存在于非线性动力系统中，但参量共振系统却既可以线性也可以非线性。

(二) **共振是系统状态失稳而引起的**。实际上，试探解(5)可视为对准静态($x=0$)的微扰，线性方程(6)是微扰幅度 ψ 的时间演化方程，共振条件(8)就是“0”状态失稳的条件。或问，只要初始微扰幅度 ψ 严格等于零，方程(6)之解恒为零，系统岂非永保“0”态？数学上确乎如是，此亦参量共振所异于直接受迫共振的特点之一。然而，任何实际系统均存在背景扰动或噪声。只要准静态($x=0$ 解)是不稳的，无论背景扰动或噪声如何微弱，都会经充分长时间后被放大。

(三) **非线性是制约参量共振放大从而使系统作有限振幅振动的关键**。对于线性受迫共振而言，只要阻力存在，共振幅度总是有限的。但线性参量共振似不然：即使存在阻尼，线性解(5)的 ρ 仍趋于无穷！当然，实际系统断不会如此。造成此似是而非者，在于模型方程(1)或(2)忽略了系统的非线性。欲定量描述参量共振，必须计及非线性而把理论扩展到**非线性参量共振**情形。非线性制约了参量放大，最终使系统进入有限振幅的非线性振动。

(四) **非线性参量共振是分岔行为的表现**。即使简如立方非线性模型系统(11)，也可能包含丰富的非线性分岔现象，不同的分岔行为产生性质迥异于线性的振动特性。

引自: <http://xlwangnu.blog.163.com/blog/static/190719270201251822249106/>

非线性单摆

Nonlinear Pendulum

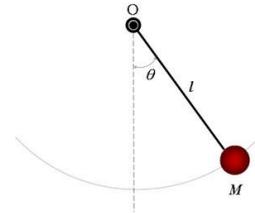
南京大學聲學研究所 王新龍

单摆是振动的范例。人所熟识的单摆，多为小角摆幅者，其运动服从线性谐振子方程，具有与系统动态行为无关的固有频率。然而，一旦角摆幅足够大，单摆之运动已然非线性矣。所幸者，单摆的非线性运动方程有椭圆函数解析解。本文讨论理想（无阻尼）单摆非线性运动的理论。结果表明，非线性单摆仍可作周期运动（摆动），但其周期非常数，而与摆幅有关：摆幅愈大，周期越长，与日常所见一致。

理想单摆由质量为 M 的质点和悬挂此质点的轻杆组成，杆之另一端固定于可自由旋转的支点 O ，如右下图所示。一旦质点 M 偏离平衡位置，摆就在重力加速度 (g) 的作用下来回摆动。图中 θ 是质点-细杆偏离垂线的瞬时角度。单摆的运动方程可表达为：

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$$

式中， $\omega_0^2 = g/l$ 。按常规符号上单点表示一阶时间导数，双点表示二阶时间导数。这是一个非线性二阶常微分方程。若单摆仅在其平衡位置 ($\theta=0$) 附近作微摆动， $|\theta| \ll 1$ ， $\sin \theta \approx \theta$ ，此单摆方程可线性化为标准的线性单摆方程，而 ω_0 正是单摆作线性摆动的固有频率， $2\pi/\omega_0$ 是摆动周期。要强调的是，**线性摆动频率 ω_0 作为**



单摆特征参数与摆幅等动态量完全无关。但是，如果摆角 $|\theta| \ll 1$ 的条件不足，则 $\sin \theta$ 不能用 θ 取代，线性化无效，必须求解单摆非线性方程。所幸者，单摆方程是少数有可解析求解的非线性方程之一。

通过时间变换： $t \rightarrow \omega_0 t$ ，可消去单摆方程中的频率常数 ω_0 。新时间以线性振动周期为单位，一个周期为 2π 。因此，不失一般性，下文恒假定 $\omega_0 = 1$ ，如此单摆方程取更简单的形式：

$$\ddot{\theta} + \sin \theta = 0 \quad (10-2-1)$$

单摆的瞬时角速度是 $\omega = d\theta/dt$ 。根据微分关系，瞬时角加速度 $d\omega/dt$ 可以表为

$$\ddot{\theta} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \omega \frac{d\omega}{d\theta}, \quad (\omega = \dot{\theta})$$

因此，单摆运动方程(10-2-1)可表达为相空间 (θ, ω) 的轨道微分方程：

$$\omega \frac{d\omega}{d\theta} + \sin \theta = 0$$

对其作角度 θ 积分，得首次积分

$$\frac{1}{2}\omega^2 + 1 - \cos\theta = E \quad (10-2-2)$$

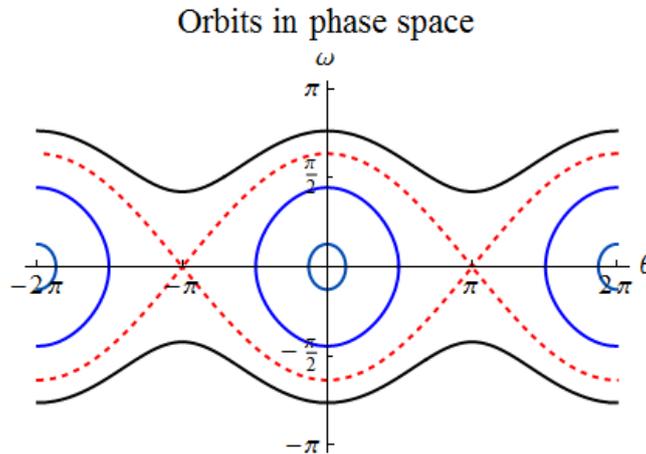
式中 E 是积分常数。此方程表述了单摆能量守恒定律：等式左端第一项是系统的动能，第二项是势能，右端积分常数 E 是总能量。然而，下文中我们宁可采用如下定义的常数：

$$k \equiv \sqrt{E/2} \quad (10-2-3)$$

取代 E ，作为衡量单摆运动的大小或强度，随后便知其用意。如此，首次积分方程变为

$$\frac{1}{2}\omega^2 + 1 - \cos\theta = 2k^2 \quad (10-2-4)$$

对于每个 k 值，能量守恒方程(10-2-4)给出了 (θ, ω) 相平面上的运动轨道，如下图所示。图中，青色轨道对应 $k=0.2$ ，蓝色 $k=0$ ，红虚线 $k=1$ ，黑色 $k=1.2$ 。图中的原点 $(0, 0)$ 对应 $k=0$ ，是系统的稳定平衡位置。



当 $k \ll 1$ 时， θ 和 ω 均为小量，方程(10-2-4)于是可近似为

$$\omega^2 + \theta^2 \approx (2k)^2, (k \ll 1)$$

即相轨道近乎半径为 $2k$ 的圆。随着 k 的增大，轨道方程(10-2-4)所围区域扩大，轨道形状也逐渐偏离圆形。但只要能量足够小乃致 $k < 1$ ，轨道仍是环绕平衡点 $(0,0)$ 而闭合曲线。在此情形下，摆角 $|\theta| < \pi$ ，即质点不可能摆动到支点的正上方 ($\theta = \pm\pi$)。

但若系统能量大到以致 $k > 1$ ，则从方程(10-2-4)可知

$$\omega^2 > 4(k^2 - 1) \rightarrow \begin{cases} \omega < -2\sqrt{k^2 - 1} \\ \omega > 2\sqrt{k^2 - 1} \end{cases}$$

此表明，角频率 ω 要么恒负，要么恒正，即单摆的质点作围绕支点的顺时针或反时针旋转运动，如上图中的上下两条黑色轨道 ($k = 1.2$) 所示。在此情形下，质点即使运动到 $\theta = \pm\pi$ 的最高点也具一定的角速度，驱使其继续往原方向转动。所以， $k = 1$ 的轨道是单摆摆动与转动的分界线 (Seperatrix) (上图红虚

线)，上下对称，交于 θ 轴的不稳定平衡点： $\theta=\pm\pi$ 。把 $k=1$ 代入方程 (4)，并整理得到分界线的轨道方程：

$$\dot{\theta}^2 = 4 \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

其满足初始条件 $\theta(0)=0$ 的定解：

$$\theta = \pm 2 \arcsin(\tanh t), \dot{\theta} = \pm 2 \operatorname{sech} t \quad (10-2-5)$$

可见，在此极端情形下，仅当 $t \rightarrow \infty$ 时， $\theta \rightarrow \pi$ ，角速度和加速度也无限缓慢地趋于零。

为了获得任意 k 值下单摆运动的通解，运用三角函数关系把首次积分方程 (4) 表为

$$\dot{\theta}^2 = 4 \left(k^2 - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

对其作角变量变换，

$$\theta \rightarrow \varphi: \sin \frac{\theta}{2} = k \sin \varphi \quad (6)$$

则不难得到新角变量 φ 所满足方程

$$\dot{\varphi}^2 = 1 - k^2 \sin^2 \varphi \rightarrow dt = \pm \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

设初始条件为 $\theta(0)=0$ 。据变换 (6)，对应 $\varphi(0)=0$ 。对上式左右两端作积分得到积分解

$$t = \pm \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (7)$$

其反演便是模量为 k 的雅可比椭圆 **am** 函数：

$$\varphi = \pm \operatorname{am}(t; k)$$

所以，公式 (3) 所定义参数 k 不但衡量了单摆运动的强度，而且具有椭圆函数模量的意义。也可用第一类 **Jacobi** 椭圆正弦函数 **sn** 把此解表为，

$$\sin \varphi = \pm \operatorname{sn}(\tau; k) \quad (8)$$

其中利用了 **am** 与 **sn** 椭圆函数之间的关系： $\sin(\operatorname{am}(x, k)) = \operatorname{sn}(x, k)$ ，而椭圆正弦函数 **sn** 定义为积分

$$t = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

的反演： $x = \operatorname{sn}(t; k)$ 。根据变换公式 (6) 换回原角变量 θ ，则解 (8) 改为，

$$\sin \frac{\theta}{2} = \pm k \operatorname{sn}(t, k), \quad \theta = \pm 2 \arcsin[k \operatorname{sn}(t; k)] \quad (9a)$$

此正是所企求的单摆非线性运动的精确解析解。利用雅可比椭圆正弦函数 sn 的恒等关系： $k \operatorname{sn}(x; k) = \operatorname{sn}(kx; 1/k)$ ，公式 (9a) 给出的解析解也可表为：

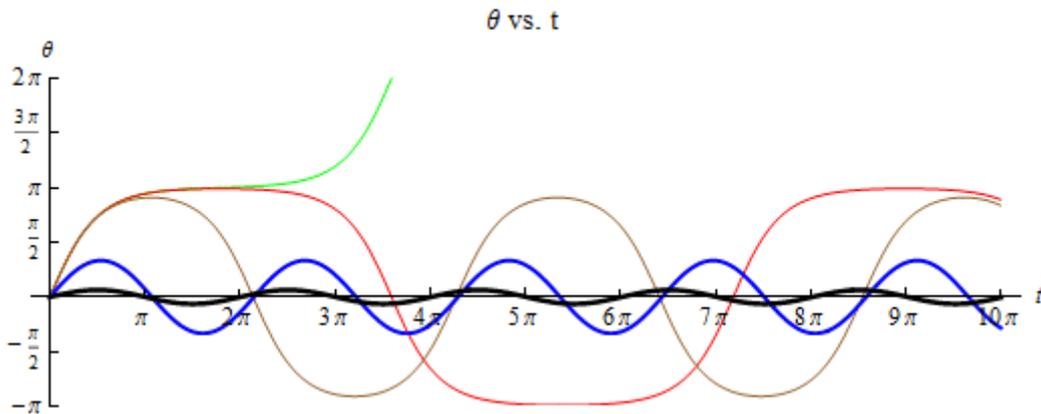
$$\theta = \pm 2 \operatorname{am}(kt; k^{-1}) \quad (9b)$$

此结果也可以直接通过方程 (4) 得到。把方程 (4) 写成积分形式，

$$kt = \int_0^{\theta} \frac{k d\theta}{2\sqrt{k^2 - \sin^2(\theta/2)}} = \int_0^{\theta/2} \frac{d(\theta/2)}{\sqrt{1 - k^{-2} \sin^2(\theta/2)}}$$

根据 am 函数的定义，此积分之反演正是 (9b)。雅可比椭圆正弦函数 sn 是特殊函数，是初等的三角正弦函数 \sin 的非线性版本。有关雅可比椭圆函数之详情，参见有关特殊函数的书籍【1】。

为了给读者以直观认识，下图分别绘出了不同 k 取值下依公式 (9) (“+”号的解) 画出的精确振荡波形，其中 k 分别取值 0.1 (黑色)，0.5 (蓝色)，0.99 (褐色)，0.9999 (红色) 和 1.0001 (绿色)。图中结果与前述相空间分析是一致的。



从图可见，当 $0 < k < 1$ 时，单摆是振荡摆动型的； k 愈小，摆幅愈小，波形愈近乎简谐。事实上，当 $k \rightarrow 0$ 时，

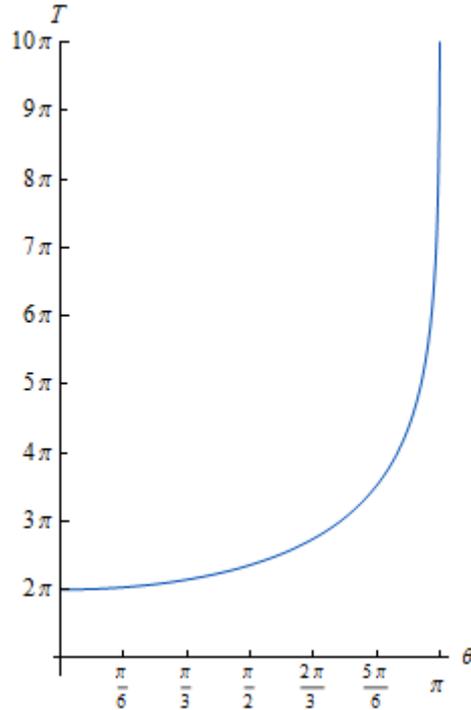
$$\operatorname{sn}(t; k) \approx \sin t, \quad \sin \frac{\theta}{2} \approx \frac{\theta}{2}$$

于是解析解 (9a) 近似为

$$\theta \approx \pm 2k \sin t, \quad (\theta|_{t=0} = 0) \quad (7)$$

相反，随着 k 的增大，波形偏离简谐，且周期变长。周期波形偏离简谐而发生畸变。者表明波形中出现了高次谐波成份。当 $k \rightarrow 1$ 时， $\operatorname{sn}(\tau; k) \rightarrow \tanh(\tau)$ ，公式 (9a) 趋近于非周期特殊解 (5)，其周期无穷长。

对于 $k < 1$ 单摆作来回摆动之情形，存在最大摆角（摆幅） θ_m 。此时，根据能量守恒方程（4），模量 k 可用角幅 θ_m 表示： $k = \sin(\theta_m/2)$ 。依变换公式（6），对应 θ_m 的 φ 值为 $\varphi = \theta_m/2$ 。所以，若公式（7）之积分上限取 $\varphi = \theta_m/2$ ，则单摆恰历 1/4 周期。结果，得到周期公式：



$$T = 4 \times \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = 4K(k) = 4K\left(\sin \frac{\theta_m}{2}\right) \quad (10)$$

其中， K 是模量为 k 的第一类全椭圆积分：

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

事实上，解（9a）中的 sn 函数的周期就是 $4K$ 。右图绘出了周期 T 与 k 的关系。从图可见，在小振幅（ $k \ll 1$ ）振动下， $T \approx 2\pi$ ；随着角幅 θ_m 的增大， k 增大，周期也随之变长；而当 $k \rightarrow 1$ 时， $T \rightarrow \infty$ 。因此，非线性单摆的振动周期不再是常数，而是摆幅 θ_m 的函数。只要 k 足够小，可以对公式（10）作级数展开：

$$T = 2\pi \left(1 + \frac{1}{4} \theta_m^2 + \frac{11}{3072} \theta_m^4 + \frac{173}{737280} \theta_m^6 + \dots \right)$$

可见，即使考虑 $O(\theta_m^2)$ 的量级，周期 T 也随 θ_m 的平方而增加。

综上所述，得到两个重要结论：

1. 非线性导致了摆动中出现了高次谐波成份；

2. 非线性摆动的频率（周期）不再是与运动无关的常数，而是摆幅的非线性函数。

须强调指出，此两者不仅是单摆所具有的，也普适于一般的非线性振动系统。

【1】王竹溪、郭敦仁著《特殊函数概论》第十章。

引自: <http://xlwangnu.blog.163.com/blog/static/1907192702012690580628/>

非线性受迫振动

Forced Nonlinear Vibration

南京大學聲學研究所 王新龍 著

非线性自由振动不复简谐，其振动频率依赖于振幅。自由振动系统自治而为，数学虽难，仍可解析精确求解。非线性受迫振动问题则更复杂，数学求解之难岂非线性自由振动可比！一般而言，诸如此类问题大多一事一论一解，殆无解析通解可寻。本文基于微扰论建构立方非线性弹性振子受迫振动的近似理论。文中在弱非线性、弱阻尼等一系列假设下导出了复振幅的时间演化方程，进而讨论平衡态及其稳态和共振特性，包括非线性分岔现象等。非线性振动异于线性者多矣，譬如，共振频率与振幅的相关性，共振峰之弯曲，多稳态及其跃迁现象，等等。

设系统力阻 R 、质点质量 M ，线性弹性系数 K ，立方非线性弹性系数 K_3 与线性弹性系数 K 之比为 $\kappa = K_3/K$ ，质点 M 受到频率为 ω 、振幅为 F_a 的简谐力驱动，则立方受迫非线性振动方程可写为

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} + R \frac{dx}{dt} + K(x + \kappa x^3) = F_a \cos \omega t$$

不失一般，下文恒设驱动力振幅 $F_a \geq 0$ 。非线性弹性系数 κ 可正可负：正者 ($\kappa > 0$) 属硬弹簧，负者 ($\kappa < 0$) 属软弹簧。引入新参量：

$$\alpha \equiv \frac{R}{2\omega M}, \quad \gamma \equiv \frac{F_a}{2\omega^2 M}, \quad \omega_0^2 \equiv \frac{K}{M}$$

其中， ω_0 是自由振动频率， α 是无量纲的阻尼（衰减）系数， γ 作为新的驱动强度取代力幅 F_a ，具有位移的量纲。在受迫驱动下，系统一般与驱动同步，稳态振动频率等于驱动频率 ω 。而阻尼一般与振动频率 ω 有关，例如粘滞阻尼与频率平方成正比。所以，用 α 取代 $\delta = R/2M$ 之优点是它可能更少地依赖于频率 ω 。受迫非线性振动方程取如下形式

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\alpha\omega \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 (x + \kappa x^3) = 2\omega^2 \gamma \cos \omega t \quad (1)$$

若定义新时间变量 $\tau = \omega_0 t$ ，则方程左端尽可消去频率 ω_0 。不过，本文为彰显物理意义仍采用原时间 t 。

主模解与复振幅方程

与线性系统不同，诸如微分方程（1）等描写的系统，非自治且非保守，难于获得精确解析通解。通常所谓的解析解多指近似或渐近解，仅适用于有限范围。即如同一问题如（1），阻尼大小不同，驱动（幅度与频率）强弱有差，所获解析解的途径和最终结果亦各异。所以，非线性问题殆无普适章法可循，大多一事一论，具体问题具体分析、具体解决。

假设微分方程（1）的各参数满足，

$$\alpha = O(\varepsilon), \gamma = O(\varepsilon), \kappa = O(\varepsilon), \omega = \omega_0(1 + O(\varepsilon)), \quad (0 < \varepsilon \ll 1) \quad (2)$$

即弱阻尼、弱非线性，且外力也十分微弱，驱动频率 ω 近乎自由振动频率 ω_0 。此处 ε 为小参量，旨在衡量大小强弱；其具体取值无关紧要，或为纯抽象数学量，或直取自某物理参数如驱动强度 γ 。最后一个假设表明，系统振动近乎共振态，因而其主要振动模式近乎自由振动：

$$x(t) = \text{Re}(\psi e^{j\omega t}) + (\text{super- or sub-harmonics of smaller order}), \quad (\psi = \rho e^{j\varphi}) \quad (3)$$

此处用 ω 取代 ω_0 ，一则因 $\omega \approx \omega_0$ ，一则因系统响应总与驱动同步之故。式中， ψ 是主模复振幅，其幅值 ρ 、相位 φ 。当然，非线性系统中还可以存在其它模式的振动成份，只是在近乎共振之情形下，其它模式之幅度与主模相比属小量级，可暂不予考虑。然而，没有理由可认为复振幅 ψ 仍是常数。所以 $\psi = \psi(t)$ 。虽然如此，因假设（2）之故，我们仍然有理由假定 ψ 是时间缓变的函数，数学表示即为

$$\dot{\psi}/\psi = O(\varepsilon), \quad \ddot{\psi}/\psi = O(\varepsilon^2) \quad (4)$$

其中撇号表示对自变量的导数（单撇表一阶导数，双撇二阶导数）。把试探解（3）代入方程（1），经归并整理，得到冗长公式

$$\left(\frac{1}{2} \psi'' + \alpha \omega \psi' + j\omega \psi' + j\alpha \omega^2 \psi + \frac{1}{2} (\alpha_0^2 - \omega^2) \psi + \frac{3}{8} \kappa \alpha_0^2 |\psi|^2 \psi - \omega^2 \gamma \right) e^{j\alpha t} + \frac{1}{8} \kappa \alpha_0^2 \psi^3 e^{3j\alpha t} + \text{c.c.} = 0$$

式中，c.c.表示前面所有项的复共轭项。上式乃谐波因子 $\exp(j\omega t)$ 和高次谐波因子 $\exp(3j\omega t)$ 的线性组合方程。需要再次提醒，非线性必然产生高次谐波项；在诸如方程（1）的立方非线性系统中，高次谐波是 3ω 频率及其倍频成份。若形式解（3）中包含 3ω 高次谐波成份，则上列方程中会有更多的 3ω 成份项。不过正如前言，在假设（2）下，诸如此类高次谐波成份在初级近似下可弃之不顾。既然如此，可无视上列方程中的 3ω 高次模式成份项。由于 $\exp(j\omega t)$ 是独立时变因子，故欲使上式等式成立，括号内的项必等于零：

$$\frac{1}{2} \psi'' + \alpha \omega \psi' + j\omega \psi' + j\alpha \omega^2 \psi + \frac{1}{2} (\alpha_0^2 - \omega^2) \psi + \frac{3}{8} \kappa \alpha_0^2 |\psi|^2 \psi - \omega^2 \gamma = 0$$

因假设（2）和（4），前两项是 $O(\varepsilon^2)$ 小量，其它诸项皆为 $O(\varepsilon)$ 小量。略去 $O(\varepsilon^2)$ 小量，再对整个方程除以 $\omega \omega_0$ ，得到

$$j\omega \frac{d\psi}{dt} + j\omega^2 \alpha \psi - \frac{1}{2}(\omega^2 - \omega_0^2)\psi + \frac{3}{8}\kappa\omega_0^2 |\psi|^2 \psi - \omega^2 \gamma = 0$$

定义

$$\beta \equiv \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\omega^2}, \mu \equiv \frac{3}{8} \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \kappa \quad (5)$$

则上列方程可简写为

$$j \left(\frac{1}{\omega} \frac{d\psi}{dt} + \alpha \psi \right) + \mu |\psi|^2 \psi - \beta \psi = \gamma \quad (6)$$

此即所求的主模复振幅 ψ 的时间演化方程——下文称之为**复振幅方程**。新定义的参数 β 实际上是驱动频率与自由振动频率之间的无量纲失谐因子，而 μ 取代 κ ，不过为书写方便而已。根据 (2) 中对驱动频率的假设，显然有

$$\beta \approx \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = O(\varepsilon), \mu \approx \frac{3}{8} \kappa = O(\varepsilon)$$

两者皆为 $O(\varepsilon)$ 量级。所以，根据假设 (2) (4)，振幅方程 (6) 中诸项皆为 $O(\varepsilon)$ 的一阶小量，体现了诸多因素在同一量级上的动态平衡，其物理意义显而易见。

若干简单推论

【一】线性情形 ($\mu=0$)：复振幅方程 (6) 有通解：

$$\psi(t) = C e^{-(\alpha + j\beta)\omega t} - \frac{j\gamma}{\alpha + j\beta}$$

其中 C 是积分复常数，取决于初始条件。代入 (3) 得到受迫振动的通解 $x(t)$ ，其中第一项是瞬态解，第二项是稳态解。

【二】无驱动 ($\gamma=0$)：从振幅方程 (6) 易推出

$$\frac{d}{dt} |\psi|^2 = -2\alpha\omega |\psi|^2 \quad \Rightarrow \quad |\psi|^2 \propto e^{-2\alpha\omega t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

由此可知，振动最终因阻尼而归于寂灭。

【三】自由振动 ($\alpha=0, \gamma=0$)：由上式知，幅值 $\rho=|\psi|$ 恒常。以此可从方程 (6) 得相位的方程：

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega(\mu\rho^2 - \beta)$$

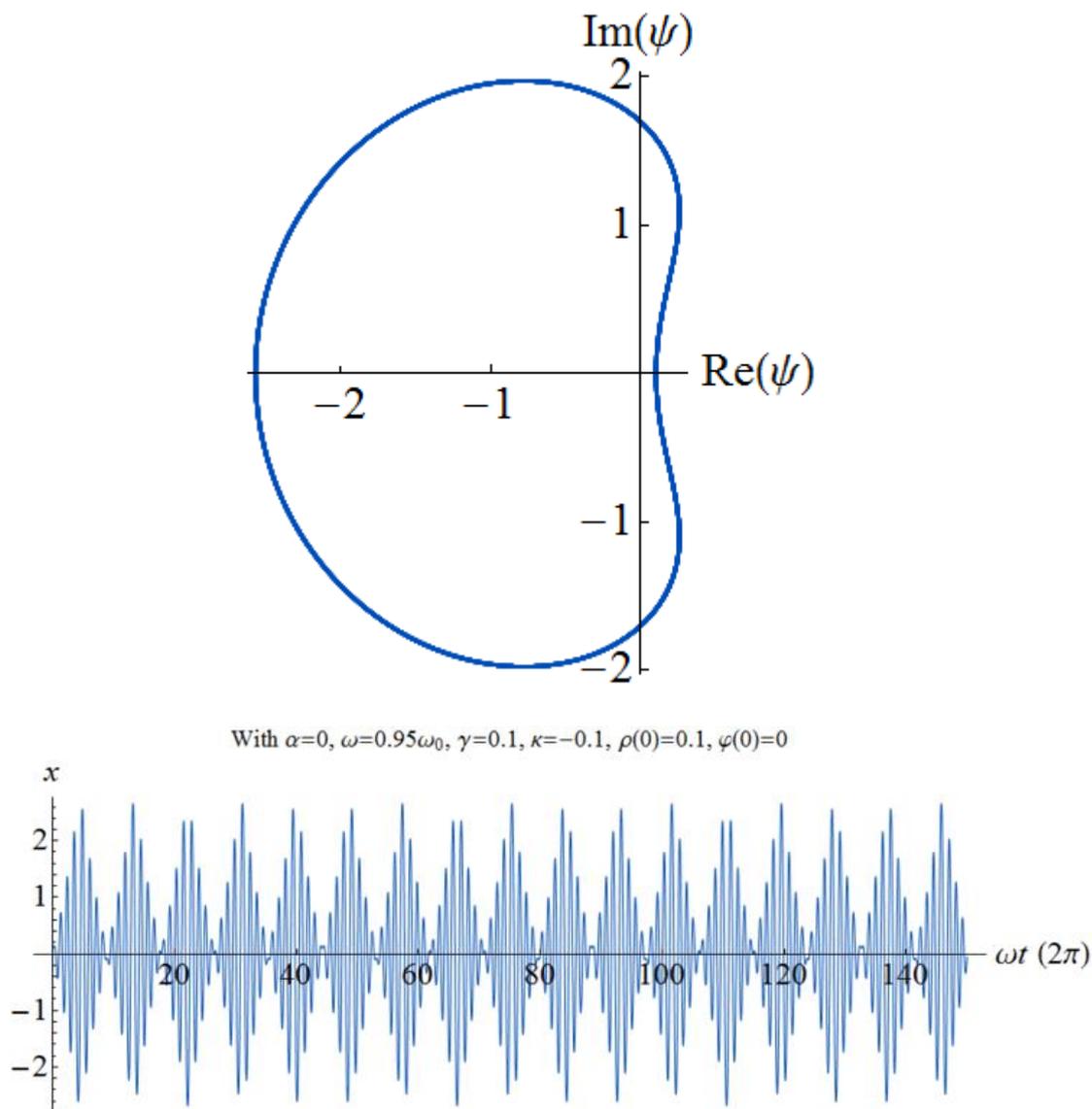
其右端常数为振幅 ψ 的时间起伏频率。然而，形式解 (3) 已然设定振动的频率为 ω ，故此振幅的起伏频率必等于零，即 $\beta = \mu\rho^2$ 。在利用 β 的定义及其 $O(\varepsilon)$ 的近似，可得到精确至 $O(\varepsilon)$ 级的自由振动频率近似公式：

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left(1 + \frac{3}{4} \kappa \rho^2 \right), \text{ 或者: } \omega = \omega_0 \left(1 + \frac{3}{8} \kappa \rho^2 + O(\varepsilon) \right)$$

所以，自由振动频率与振幅 ρ 的平方成正比。在《非线性自由振动》文中，也给出了非线性自由振动周期的公式。若留意彼处之振幅 a 与如今的 ρ 的关系： $a^2 = |\kappa| \rho^2$ ，则两者在 $O(a^2)$ 近似下完全一致，殊途同归矣！

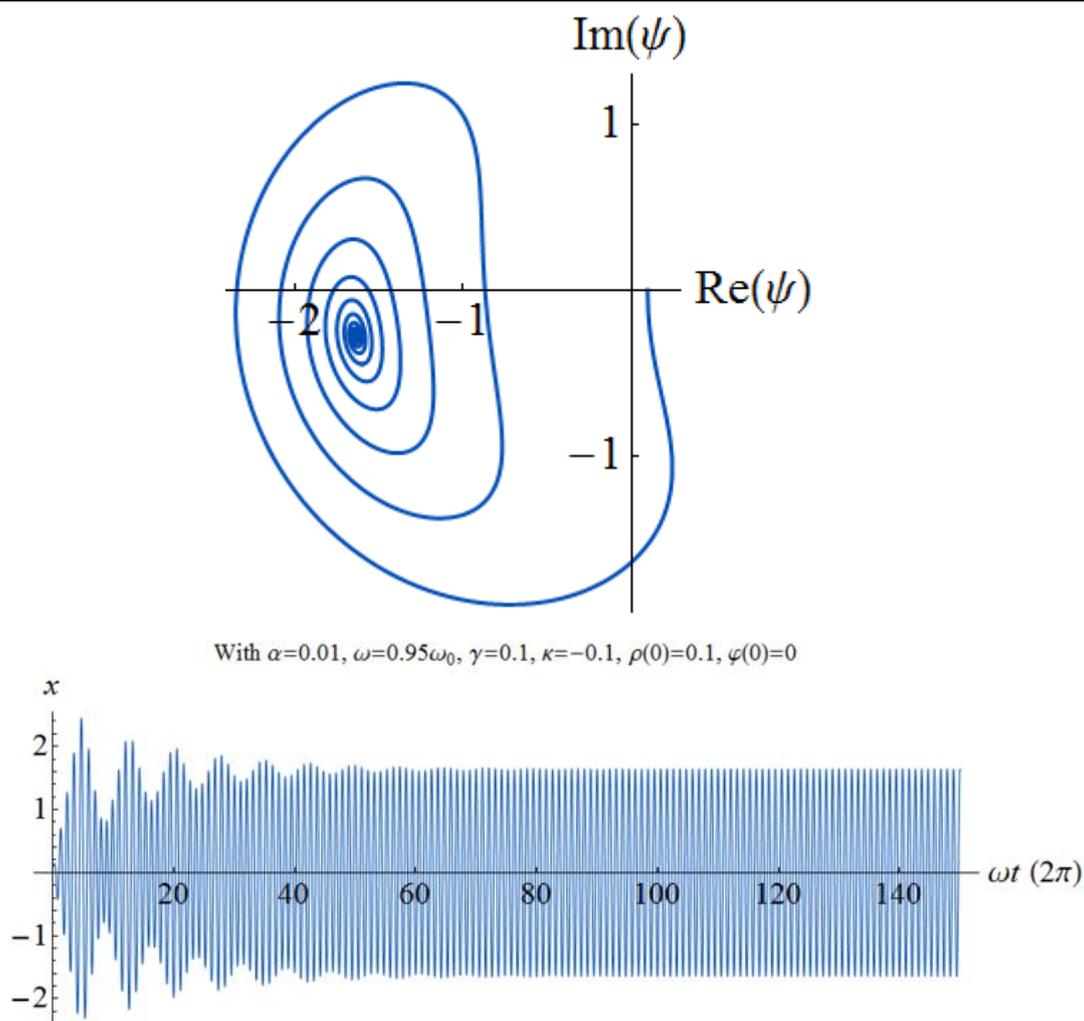
准周期与稳态振动

复振幅方程 (6) 是一阶常微分方程，貌似比原方程 (1) 简单，但因事涉复变函数 $\psi(t)$ ，欲求其解析解也不易，多半求诸数值方法。对复振幅方程 (6) 的数值计算表明，若无阻尼 ($\alpha=0$)，复振幅 $\psi(t)$ 的时间演化是复平面的闭合轨道，如图一左图所示。此乃复平面之极限环 (limit circle)，表明复振幅 $\psi(t)$ 是时间的周期函数。极限环由非线性 Hopf 分岔所致。进一步的数值计算还表明， $\psi(t)$ 的周期不仅依赖于驱动参数，甚至还与初始条件有关，因而独立于驱动振动周期 $2\pi/\omega$ 。直接数值求解两阶微分方程 (1)，得到与左图对应的数值解 $x(t)$ ，示于图一右图。振动时域波形的横坐标单位为线性自由振动的周期 $2\pi/\omega_0$ 。也可以把复振幅方程 (6) 的解 $\psi(t)$ 代入形式解 (3)，得到 $x(t)$ 的时域振动波形，结果与所示相差无几，由此肯定了微扰方法所导出的复振幅方程 (6) 的正确性。 ψ 复平面的极限环体现为振动波形 $x(t)$ 振幅的周期包络调制，故而振动 $x(t)$ 有两个周期，是谓准周期 (quasi-periodic) 振动。图中，包络调制的周期远大于振动周期，约为 10 倍，所以振幅 $\psi(t)$ 相对于振动周期是缓变的函数，与假设 (4) 完全一致。



图一、无阻尼受迫驱动的振动。左图：复振幅轨道，右图：振动波形

然而，只要存在阻尼 ($\alpha \neq 0$)，极限环就失稳， $\psi(t)$ (螺旋状地) 趋向极限点 (不动点, fixed points)，如图二左图所示。极限点是复振幅 ψ 在复平面上的不动点，是稳定的平衡态，对应振动位移 $x(t)$ 作稳态的周期运动。图二右图给出了相应的振动波形。该波形也与由形式解 (3) 算得的结果一致。可见，即使阻尼微弱如此，它也能渐渐地“抹平”波形振幅的调制起伏，最终使振动变为严格周期的，即 ψ 趋于常数。因此，耗散非线性振子的受迫振动经瞬态而趋于稳态周期振动，此结论与线性振动的一致。



图二、弱阻尼受迫振动。左图：复振幅 ψ 螺旋式地趋向极限点（焦点）；右图：振动波形趋向稳态

平衡态与非线性共振

前已指出，**平衡态**是振幅 ψ 不随时间变化 ($d\psi/dt=0$) 之状态。在平衡态，系统作严格的稳态周期振动。令方程 (6) 的 $d\psi/dt=0$ ，得到平衡态所须满足的方程，由此得到复振幅 ψ 的隐式解：

$$j\psi = \frac{\gamma}{\alpha + j(\beta - \mu|\psi|^2)} \quad (7a)$$

把 α 、 β 、 γ 和 μ 恢复为原参数，并注意 $\kappa = K_3/K$ ，则此公式经整理可表成

$$j\omega\psi = \frac{F_a}{R + j\omega M + \frac{K_{\text{eff}}}{j\omega}}, \quad \left(K_{\text{eff}} \equiv K + \frac{3}{4} K_3 |\psi|^2 \right) \quad (7b)$$

而根据 (3) 式的定义, $j\omega\psi$ 是速度的复振幅, 所以右式的分母是力阻抗 Z 。由此可见, 非线性弹性之存在相当于原线性弹性系数 K 用有效弹性系数 K_{eff} 取代。然而, 有效弹性系数 K_{eff} 是振幅 ρ^2 的函数, 故而公式 (7) 只是隐式平衡态解。用 $\psi = \rho \exp(j\varphi)$ 代入平衡态方程, 分离实部和虚部, 得到确定平衡态振幅 ρ 和相位 φ 的方程:

$$\gamma \cos \varphi = (\mu \rho^2 - \beta) \rho, \quad \gamma \sin \varphi = -\alpha \rho$$

或者,

$$\left(\frac{\gamma}{\rho} \right)^2 = \alpha^2 + (\mu \rho^2 - \beta)^2, \quad \sin \varphi = -\alpha \frac{\rho}{\gamma} \quad (8)$$

由此可见, 非线性振子的稳态振幅与相位与诸参数尤其是驱动参数呈复杂关系, 非一目了然。然则, 至少从中可轻易得出两点结论。

- 其一、软弹簧和硬弹簧的响应具有简单的对易关系:

$$(\mu, \beta) \rightleftharpoons (-\mu, -\beta) \quad (9)$$

即频响对称: 软弹簧在 β 处的响应等于硬弹簧在 $-\beta$ 处的响应。

- 其二, 对于给定的阻尼系数 α 和驱动强度 γ 而言, 方程 (8) 第一式之右端当

$$\mu \rho^2 = \beta \quad (10)$$

时取最小值, 故而依等式左端振幅 ρ 为最大值。

公式 (10) 也可直接令 (7a) 或 (7b) 中有效力阻抗 Z 的虚部为零而得到。把定义式代入 (10), 稍经整理得到与之等价的表达式:

$$\alpha_r^2 = \frac{K_{\text{eff}}}{M} = \frac{K}{M} \left(1 + \frac{3}{4} \kappa \rho_r^2 \right), \quad (\rho_r = |\psi_r|) \quad (10a)$$

式中为区别起见, 特以下标 "r" 标记共振态诸量。上式给出了共振频率 ω_r 与振幅 ρ_r 的重要关系, 在 $O(\epsilon)$ 近似下它与前述自由振动频率的表达式完全一致。所以, 共振频率依赖于振幅是非线性系统的重要特征。软弹簧共振频率下移 ($\beta < 0, \omega_r < \omega_0$), 而硬弹簧的共振频率上移 ($\beta > 0, \omega_r > \omega_0$)。在共振 $\omega = \omega_r$ 下, 根据 (7a) 或 (7b) 得到共振峰值: $\psi_r = \gamma / j\alpha = F_a / (j\omega_r R)$ 。

平衡态的稳定性

平衡态有稳定的 (stable)，也有不稳定的 (unstable)。稳定性 (stability) 是平衡态的根本性质，关乎实验能否维持平衡态的存在。本节特标记方程 (8) 的平衡态解为 (ρ_0, φ_0) 。对平衡态作微扰

$$\psi = \psi_0 (1 + A(t) + jB(t)), \quad (\psi_0 = \rho_0 e^{j\varphi_0}, |A| \ll 1, |B| \ll 1)$$

代入振幅演化方程 (6)，略去微扰量 A 和 B 的高阶小量，得到如下线性化微扰方程

$$\frac{1}{\omega} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha & \beta - \mu\rho_0^2 \\ -\beta + 3\mu\rho_0^2 & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

其系数矩阵具有一对本征值

$$\lambda_{\pm} = \omega \left[-\alpha \pm \sqrt{(\beta - \mu\rho_0^2)(3\mu\rho_0^2 - \beta)} \right]$$

注意到，公式 (8) 的第一式给出了 γ 作为 ρ 的单值函数： $\gamma = \gamma(\rho)$ ，其导数为

$$\frac{\gamma}{\rho_0} \frac{d\gamma}{d\rho_0} = \alpha^2 - (\beta - \mu\rho_0^2)(3\mu\rho_0^2 - \beta)$$

所以，只要

$$\frac{d\gamma}{d\rho_0} < 0, \quad \text{or} \quad \frac{d\rho_0}{d\gamma} < 0 \quad (11)$$

本征值之一具有正的实部，微扰指数发散，平衡态是不稳定的。此稳定性判据表明，如果平衡态的幅度随驱动强度 γ 的增强反而变小，则此平衡态必然是不稳定的，与常识一致。同样得到

$$\rho_0 (\mu\rho_0^2 - \beta) \frac{d\beta}{d\rho_0} = \alpha^2 - (3\mu\rho_0^2 - \beta)(\beta - \mu\rho_0^2)$$

所以，只要等式左端小于零，即

$$\mu\rho_0^2 > \beta, \quad \frac{d\beta}{d\rho_0} < 0, \quad \text{或者}, \quad \mu\rho_0^2 < \beta, \quad \frac{d\beta}{d\rho_0} > 0 \quad (12)$$

本征值之一具有正的实部，微扰发散，平衡态解也是不稳定的。

对驱动振幅的响应

众所周知，线性振子 ($\mu=0$) 的振幅 ρ 正比于驱动强度 γ 。非线性则不然。从方程 (8) 的第一式可知， γ 可视为 ρ 的单值函数： $\gamma = \gamma(\rho)$ ，但反函数 $\rho = \rho(\gamma)$ 则不尽然。简单分析表明，只要同时满足如下条件

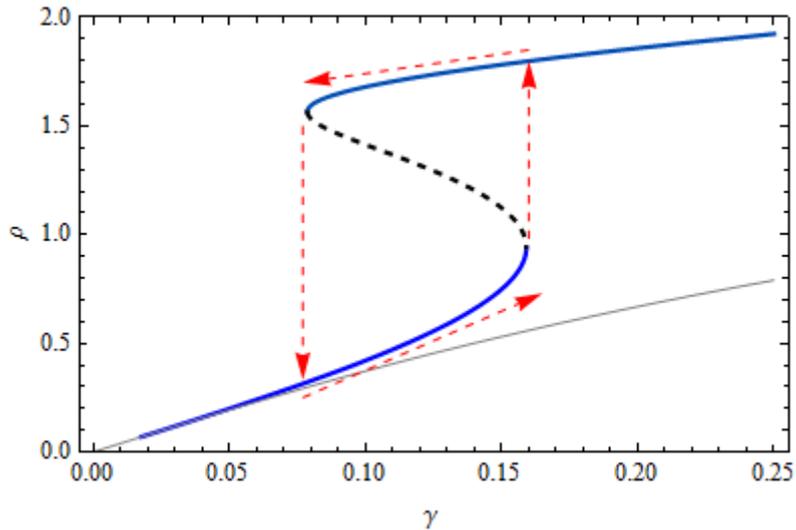
$$\mu\beta > 0, \quad \beta^2 > 3\alpha^2 \quad (13)$$

则反函数 $\rho=\rho(\gamma)$ 是多值的；否则函数 $\gamma=\gamma(\rho)$ 是单调递增的，即响应幅度 ρ 随驱动幅度 γ 的增强而增大。在满足上列条件之情形之下， $\gamma=\gamma(\rho)$ 存在两个极值点，

$$\frac{d\gamma}{d\rho} = 0 \rightarrow \rho_{\pm}^2 = \frac{2\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 3\alpha^2}}{3\mu}, \quad \left. \frac{d^2\gamma}{d\rho^2} \right|_{\rho=\rho_{\pm}} = \pm 8\mu\rho_{\pm}^2 \sqrt{\beta^2 - 3\alpha^2}$$

在由 ρ_{\pm} 构成的区间 $[\rho_-, \rho_+]$ 内， $d\gamma/d\rho < 0$ 。根据稳定性判据 (11) 指出，此区间内的平衡态解是不稳定的。下图画出了硬弹簧 $\rho=\rho(\gamma)$ 的曲线。根据对易关系 (9)，若 β 取负值，则软弹簧也有相同的 $\rho-\gamma$ 响应图，故仅就硬弹簧作出说明。图中的 (蓝色+虚线+青线) 响应曲线符合条件 (13)，故在振幅区间 $[\rho_-, \rho_+]$ 所对应的 γ 区间内存在多值解，其中的虚线所表示的正是区间 $[\rho_-, \rho_+]$ 内的不稳定平衡态解。在此区间之外，平衡态振幅 ρ 仍是驱动强度 γ 的单值函数。

With $\alpha=0.05, \beta=0.25, \mu=0.1$



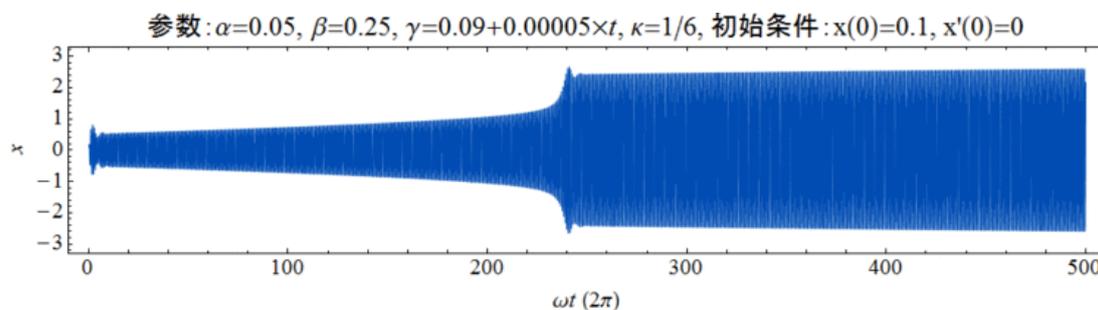
图三、平衡态振幅 ρ 对驱动幅度 γ 的依赖性。参数标于图上。灰色曲线是 $\beta=0.25$ 。

设若驱动振幅 γ 从小渐增，振幅 ρ 当沿下分支解 (蓝线) 随之增大。但当 γ 增加到 $d\rho/d\gamma=\infty$ (即 $d\gamma/d\rho=0$) 时，蓝线遽然而止，平衡态始失稳 (此点的微扰本征值 $(\lambda_+=2, \lambda_-=0)$)，复振幅 ψ 奚往？答曰：追寻新的稳定平衡态也！故而，经暂态过程后跃迁到新的稳定平衡态——上分支解 (青线)，振幅 ρ 出现上跃，如上图中向上箭头所示。此种因参数变化所致平衡态失稳而使系统状态发生激变之行为，谓之分岔 (bifurcation)，为一般非线性系统所固有。反之，若驱动强度 γ 由大减弱，平衡态振幅沿上分支 (青线) 随之减小，但当 γ 减至上分支的尽头 (即 ρ 降低至 ρ_+) 时，(青线的) 大振幅平衡态失稳而辄下跳至 (蓝色的) 小振幅分支，如图三下箭头所示。这是典型的鞍节点分岔所致 (saddle-node bifurcation) 的现象。如此，构成图中红色箭头所指的跃迁环。诚然，若要跃迁环存在，必须满足条件 (13)。还需指出，即使在 $\beta < 0$ 区间，跃迁环亦非总存在。在无跃迁环之情形下，平衡态的振幅 ρ 随驱动强度 γ 的关系虽非线性，但仍是单调递增的函数，如上图中灰色曲线所示。

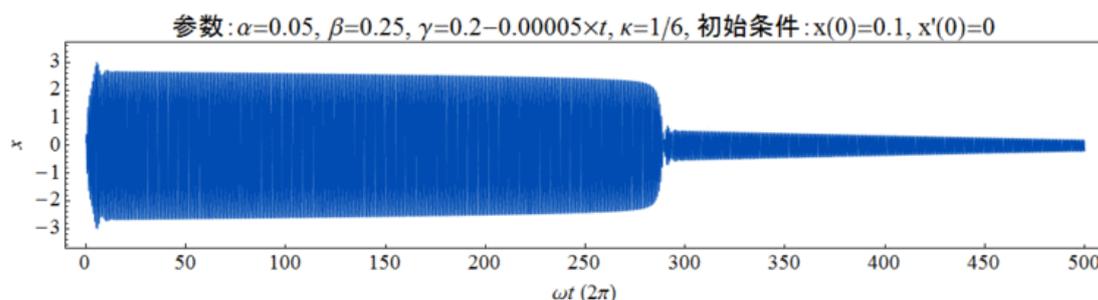
数值仿真实验

为了验证上述理论，特利用常微分方程数值算法对受迫振动方程（1）进行了数值模拟。在数值模拟中，其它参数固定，仅改变驱动强度 γ 。为了观察跃迁现象，参数必须满足条件（13），故取 $\mu=0.1$ （硬弹簧）， $\beta=0.25$ 。如果 β 取值太小，跃迁环不存在，故特取较大的值。实验一是驱动强度线性缓增：

$\gamma=0.05+0.0001\times t$ 。初始 $t=0$ 时， $\gamma=0.05$ ，所以振动迅速进入图三蓝色下分支的小振幅稳定平衡态。随着驱动的增强，振幅也随之增大，但 γ 增大到一定程度后，振动突然放大而进入较大振幅的稳态运动，即跃迁到图三的青色分支解。实验二是驱动强度线性缓降： $\gamma=0.2-0.0001\times t$ 。初始 $t=0$ 时， $\gamma=0.2$ ，所以振动迅速稳定于上分支的平衡态，作大振幅振动。随着驱动的减弱，振动振幅也略有减小，但当 γ 减弱到一定程度，振动突然大幅减小而进入小振幅稳态运动，即跃迁到蓝色下分支解。可见，仿真实验的结果与图三的理论预测全然一致。



实验一、驱动强度缓增



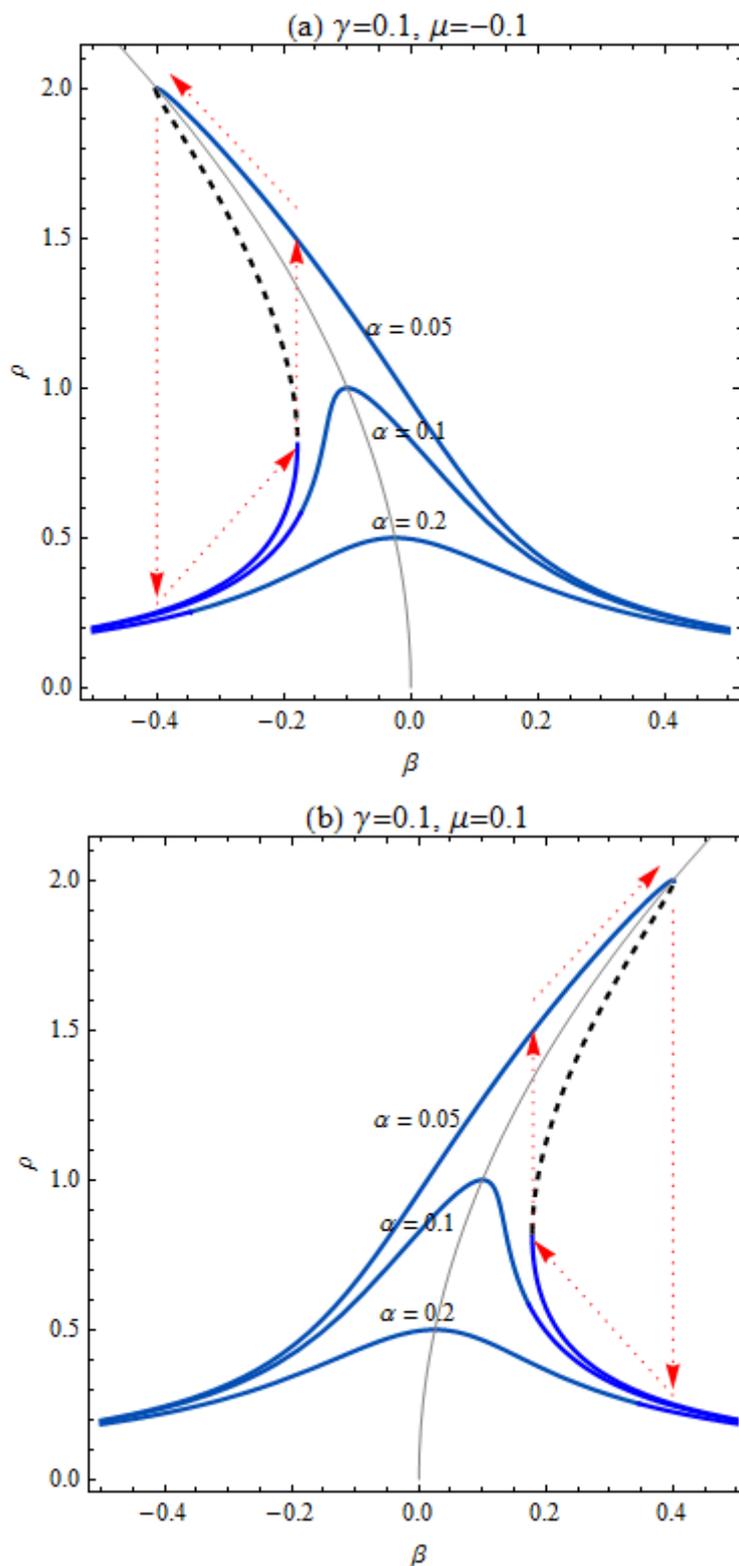
实验二、驱动强度缓减

图四、驱动强度渐变下振幅跃迁现象的观察。

幅频响应

如果固定其它参数，则公式（8）的第一式就给出了幅频（ $\rho-\beta$ ）响应关系或共振曲线，如下图所示。下图的左右两图分别属于软、硬弹簧。但根据对易关系

(9)，它们以 $\beta=0$ 为中心相互对称，故以下仅以软弹簧为例说明。从图可见，因非线性之故，共振峰弯曲矣。共振频率和共振峰值分别由公式 (10a) 和 (10b) 给出，正好位于由方程 (10) 所定的 (灰色) 曲线上。软弹簧的共振峰向左弯。如果阻尼系数较小，在在 $\beta < 0$ 的某区间内，平衡态解存在上中下三个分支 (青线、虚线和蓝线)。根据稳定性判据 (12) 的第一个判据，虚线所表示的中分支平衡态解是不稳的。

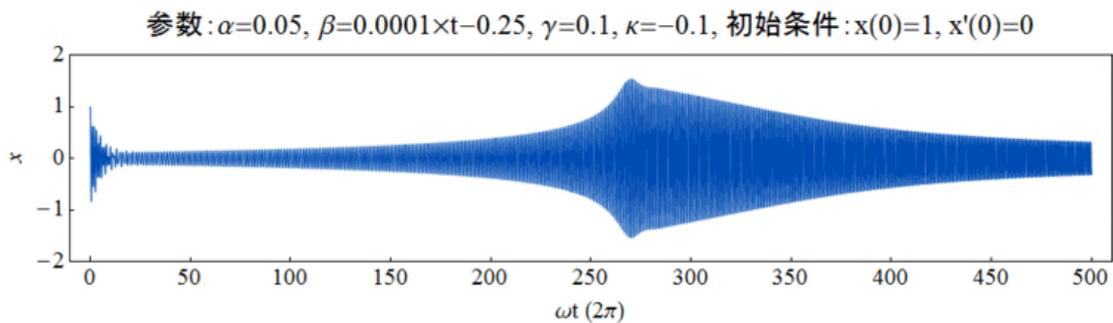


图五、非线性幅频响应。(a) 软弹簧，(b) 硬弹簧。共振峰从高到低，阻尼系数标于曲线旁。

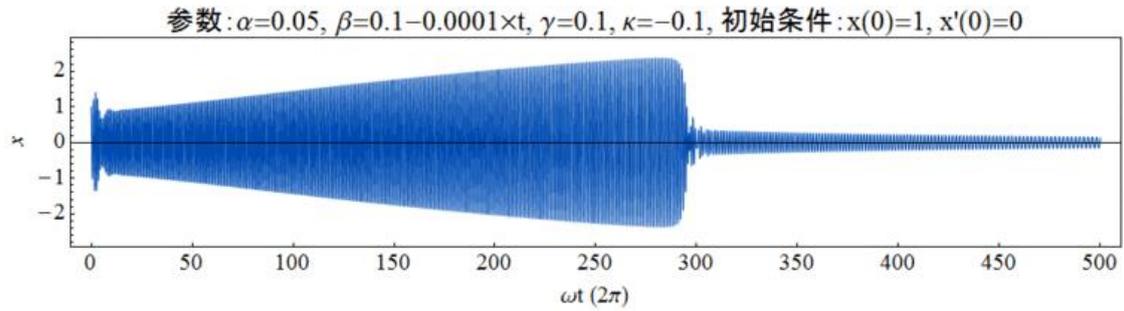
当 ω 从 $\omega < \omega_0$ (即 $\beta < 0$) 升高时，幅值 ρ 起先沿平衡态的下分支解 (蓝线) 而随之增大，但当 ω 升高到 $d\rho/d\beta = \infty$ 位置时，原蓝色平衡态无法延续，振幅突跳至上分支 (青线)，如红色上箭头所指；然后，随着 ω 的继续升高，振幅 ρ 沿上分支减小。反之，若频率 ω 从 $\omega > \omega_0$ (即 $\beta > 0$) 逐渐降低，则解沿上分支 (青线) 而振幅 ρ 逐渐增大，但当到达共振峰顶时，如果继续降低 ω ，则青色平衡态无法延续，振幅突然从较高的值下跳到较小的值——下分支 (蓝线)，如红色下箭头所指。显然，上跃频率位置高于下跳频率，由此形成了箭头所指的跃迁环路。就本质而言，幅频响应之跃迁现象也不过是非线性分岔行为而已，恕不细述。

频响数值实验

为观察上述振幅跃迁现象，利用常微分方程数值算法直接模拟受迫驱动方程 (1)。实验采用软弹簧振子，驱动信号由扫频信号发生器产生，信号频率 ω 按线性规律连续变化。只要扫频速度足够慢，系统的响应基本处于准稳态。实验一的扫频持续升高，横跨图五 (a) 所示的幅度上跃对应的频率。实验结果如下图所示，有关参数及频率 ω (即 β) 的变化均标于图上。在起初的极短的瞬态过程后，响应趋于稳定，振幅随频率的升高而增大；但在某个时刻，振幅陡然增大；随后经短暂瞬态又趋向稳定，并随频率的继续升高而减小。这与图五 (a) 的预测一致。实验二的扫频连续降低，横跨共振频率，其振动波形如下图所示。随着扫频信号频率的降低，振子振幅渐渐增大；但在某时刻急遽减小；然后，经过短暂瞬态后响应趋向稳定，但振幅随频率的增高反而连续下降，与此前的预测完全一致。



实验一：频率连续升高



实验二：频率连续降低

图六、软弹簧跃迁现象的数值实验。上图：扫频信号的频率连续增高，下图：扫频信号的频率连续降低。

结论

- 1、与线性受迫系统相同，只要阻尼的存在，非线性振子最终趋向平衡态而作稳态周期振动；
- 2、非线性弹簧等效于存在与驱动振幅平方成正比的有效弹性系数；
- 3、稳态振幅是驱动参数的复杂函数，且可能是多值的。结果振动响应曲线出现分叉行为，导致诸如振幅跃迁等特有现象。

引自: <http://xlwangnu.blog.163.com/blog/static/1907192702012825114052923/>

非线性振动链与孤子

Solitons in a one-dimensional vibratory chain of particles coupled by nonlinear springs

南京大學聲學研究所 王新龍

孤波或孤子乃非线性波之重要表现形式，其产生取决于非线性与频散的动力平衡。本文考察一维非线性弹簧质点链状振动系统中的孤子现象。在此质点链中，因弹性耦合之故，质点的振动在链中依次传递，遂成弹性波。惟其离散性，质点链的弹性波具有显著的频散效应。又因非线性弹性之故，弹性波是非线性的。本文所关注者，乃弹性力具有二次非线性之简单情形。藉此链状质点振动模型，文中详细分析了孤子产生的频散与非线性平衡机理。

如图一所示的“...弹簧-质点-弹簧-质点-弹簧...”链状阵列构成了一维质点振动系统。设质点的质量均为 M ，弹簧的弹性力皆有形式 $F(\Delta\xi)$ ，其中 $\Delta\xi$ 是弹簧的伸长量。在此阵列中，第 n 个质点 ($n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$) 在左右弹簧的弹性力作用下沿阵列方向振动，其位移 ξ_n 满足振动方程

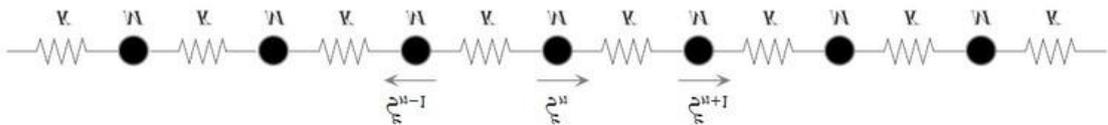
$$M \frac{d^2 \xi_n}{dt^2} = F(\xi_n - \xi_{n-1}) - F(\xi_{n+1} - \xi_n), \quad (n \text{ 取整数}) \quad (1)$$

若质点之间的相对位移极小，即 $|\Delta\xi| \ll 1$ ，则

$$F(\Delta\xi) \approx -K_1 \Delta\xi, \quad [K_1 \equiv -F'(0)]$$

其中撇号“'”表示导数。 K_1 是线性弹性系数。于是，振动方程 (1) 可近似为如下线性振动方程：

$$M \frac{d^2 \xi_n}{dt^2} = K(\xi_{n+1} - 2\xi_n + \xi_{n-1}), \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots) \quad (2)$$



图一、弹簧-质点阵列系统。

但是，假如 $\Delta\xi$ 不是很小，或者弹簧的非线性较强，则必须计入弹力的非线性效应，即弹性力是非线性的。一般而言，非线性弹性力 F 可作泰勒级数展开如下：

$$F(\Delta\xi) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_n}{n!} (\Delta\xi)^n, \quad [K_n = -F^{(n)}(0)] \quad (3)$$

其中 K_2 是二次非线性弹性系数, K_3 是三次非线性弹性系数, 等等。 K_n 作为非线性参数表征了非线性弹性的强弱程度。显然, 如果 K_2 以及偶次非线性系数为零, 则弹性力 F 是反对称的: $F(-\Delta\xi) = -F(\Delta\xi)$, 弹性势能函数

$$V(\Delta\xi) = -\int_0^{\Delta\xi} F(x) dx \neq -V(-\Delta\xi)$$

是对称的, 即 $V(-\Delta\xi) = V(\Delta\xi)$ 。反之, 则弹性力 F 是非反对称的: $F(-\Delta\xi) \neq -F(\Delta\xi)$, 即压缩和伸长的弹性力大小是不同的, 相应的弹性势能函数 V 是不对称的。最简单的非反对称、非线性弹性力模型当属 F 是二次非线性函数

$$F(\Delta\xi) = -K_1\Delta\xi - \frac{1}{2}K_2(\Delta\xi)^2$$

它所对应的振动质点链振动模型 (1) 即所谓的 FPU (Fermi-Pasta-Ulam)— α 模型。本文所论者, 概为公式 (3) 中 $K_2 \neq 0$ 之一般情形。

一、线性振动波及其色散

线性质点振动方程 (2) 描述了一维线性链状弹簧-质点振动系统的运动, 具有行波振动解:

$$\xi_n = A e^{j(\omega t - kx_n)}, \quad (x_n = nd) \quad (4)$$

其中, x_n 表示第 n 个质点的静态位置, d 是质点之间的静态间距。此处假设 $k > 0$, 即波沿 x 轴正向传播。这是一种点阵相邻质点整体一致振动的波动, 故而是纵向弹性振动波 (固体弹性棒中的纵波是其连续极限), 在固体物理中也称为“声学波”。将行波解 (4) 代入微分方程 (2), 得到振动频率 ω 与波数 k 之间的固有关系:

$$\omega = 2\omega_0 \sin\left(\frac{1}{2}kd\right), \quad \left(\omega_0^2 = \frac{K_1}{M}, K_1 \equiv -F'(0)\right) \quad (5)$$

其中, ω_0 是单个弹簧和质点构成的单振子的固有频率, 正号“+” (负号“-”) 表示正向 (负向) 传播的弹性波。可见, 频率 ω 与波数 k 呈非线性关系。正因此非线性关系, 致使波速 c 非常数, 而依赖于振动频率 (或波数):

$$c = \frac{\omega}{k} = c_0 \frac{\sin\left(\frac{1}{2}kd\right)}{\frac{1}{2}kd}, \quad (c_0 \equiv \omega_0 d)$$

在长波极限 ($kd \rightarrow 0$) 下, $c \rightarrow c_0$ 。可见, 频率不同, 波速亦不同。波速 c 依赖于频率之现象谓之**频散** (即在光学中的**色散**, dispersion) 效应。线性系统符合叠加原理。但是, 不同频率叠加而成的复合弹性波将因频散效应而最终互相散开, 致使复合波形弥散。

公式 (5) 也表明, 当且仅当 $\omega < 2\omega_0$ 时, 波数 k 才有实数解; 否则, k 为纯虚数, 解 (4) 所描述的振动在空间是指数衰减的, 或者弹性振动波是非传播的 (nonpropagating)。若 $\omega = 2\omega_0$, 则 $kd = (2m-1)\pi$, 即间距 d 是半波长的奇数倍: $d = (2m-1)\lambda/2$, 因而相邻质点的振动刚好反相。在频率范围 $0 < \omega < 2\omega_0$ 内, 公式 (4) 所表示的是质点整体一致 (同相) 的弹性波动 (声学波)。而对于 $\omega > 2\omega_0$ 的频率, 不可能再存在这种整体一致的振动, 故而 $\omega > 2\omega_0$ 是弹性波传播的禁带 (forbidden band)。高频振动时, 质点-弹簧系统呈现强烈的惯性行为, 从而阻碍了弹性波的传播, 遂有弹性波禁带的存在。

根据色散关系 (5), 长波极限 ($kd \rightarrow 0$) 下, $\omega/\omega_0 \approx kd$, $c \approx c_0$ 。在此极限下, 质点间距 d 远小于波长 λ , 质点显得十分密集, 离散质点阵列趋于连续弹性体, 犹若弹性棒, 故几无色散。事实上, 如果把质点位移的空间分布视为函数: $\xi_n = \xi(x_n, t)$, 则因长波极限下 $d \rightarrow 0$, 方程 (2) 右端括号内项可近似为

$$\begin{aligned} \xi_{n+1} - 2\xi_n + \xi_{n-1} &= \xi(x_{n+1}, t) - 2\xi(x_n, t) + \xi(x_{n-1}, t) \\ &= \xi(x_n + d, t) - 2\xi(x_n, t) + \xi(x_n - d, t) \\ &\approx d^2 \left. \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial x^2} \right|_{x=x_n} \end{aligned}$$

方程 (2) 因而可近似为

$$\frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial t^2} \approx c_0^2 \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial x^2}, \quad (x = x_n)$$

此即波速为 c_0 的线性波动方程, 与棒的纵波方程形式完全相同。

二、弱频散与弱非线性假设

本文所关注的是弱频散和弱非线性情形。首先阐明弱频散和弱非线性的概念。

弱频散的假设

在长波近似 ($\lambda = 2\pi/k \gg d$) 下, kd 乃小参量, 即 $kd \ll 1$ 。根据公式 (5), 得到如下频散公式的近似

$$\begin{cases} \frac{\omega}{\omega_0} \approx kd \left(1 - \frac{1}{3} k^2 d^2 \right) = O(kd) \\ \frac{c}{c_0} \approx 1 - \frac{1}{3} k^2 d^2 = 1 + O(k^2 d^2) \end{cases}$$

第一式指出，长波 ($\lambda \gg d$) 之谓与低频 ($\omega \ll \omega_0$) 等价。而第二式则指出，在长波情形下波速 c 的频散效应是 $O(kd)^2$ 的高阶小量。所以，无量纲参量

$$\varepsilon = kd \quad (6)$$

刻画了频散的强弱。 $\varepsilon = o(1)$ 即弱色散 (weakly dispersive) 之谓也。

弱非线性的假设

设 a 为位移 $\square_n = \square(x_n, t)$ 的振幅。要衡量 a 的大小，需要有一个与之比较的空间尺度。共振频率 ω_0 对应的波长 $\lambda_0 = 2\pi/k_0$ 是一个恰当的空间尺度。而根据公式 (5)，波长 λ_0 与间距 d 同量级：

$$k_0 d = 2 \arcsin \frac{1}{2} \approx 1.05$$

故定义非线性参量

$$\alpha \equiv k_0 a \propto \frac{a}{d} \quad (7)$$

弱非线性 (weakly nonlinear) 即指 $\alpha = o(1)$ ，或 $\square_n = d \times O(a) \ll d$ 。

三、非线性弹性波

频率为 ω 的质点位移 \square_n 可写成连续波函数 \square 在离散点 x_n 的取值，

$$\xi_n(t) = \xi(kx, \omega t) \Big|_{x=x_n}, \quad (\omega = kc) \quad (8)$$

波数 k 是表征了相邻质点振动起伏的快慢。进一步认为 $\square(z, \tau)$ 是其宗量 z 和 τ 的光滑函数，并具有下文所用到的各阶导数。用 $z = kx$ 和 $\tau = \omega t$ 作为位移函数 \square 的时空变量之好处在于， z 和 τ 分别为无量纲空间和时间变量，分别相对于波的空间和时间特征长度归一化，可以恰当地表述波函数 \square 的时空变化快慢。无量纲化乃非线性分析的良好习惯。根据弱频散 $kd = \varepsilon \ll 1$ 的假设，位移波函数 $\square(kx, \omega t)$ 是空间 x 和时间 t 的缓变函数，其空间和时间的变化

$$\left| \frac{\xi(kx_{n+1}, \alpha t) - \xi(kx_n, \alpha t)}{\xi(kx_n, \alpha t)} \right| \approx \left| \frac{1}{\xi(z, \alpha t)} \frac{\partial \xi(z, \alpha t)}{\partial z} \right|_{z=kx_n} kd = O(\varepsilon)$$

$$\left| \frac{\xi(kx_n, \omega(t + 2\pi/\omega_0)) - \xi(kx_n, \alpha t)}{\xi(kx_n, \alpha t)} \right| \approx \left| \frac{1}{\xi(kx_n, \tau)} \frac{\partial \xi(kx_n, \tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=\alpha t} 2\pi \frac{\omega}{\omega_0} = O(\varepsilon)$$

即相邻质点之间、同一质点在 $T_0=2\pi/\omega_0$ 时间内的变化是 $O(\varepsilon)$ 级小量。又由于

$$\frac{k}{k_0} = \frac{kd}{k_0 d} = O(\varepsilon) \rightarrow k = k_0 O(\varepsilon), \quad (k_0 d = O(1))$$

所以，有理由把 (8) 式所定义的位移波函数 ξ 重写成如下的形式：

$$\xi(kx, \alpha t) = \alpha u(\varepsilon k_0 x, \varepsilon \omega_0 t) = \alpha u(x', t') \Big|_{x'=\varepsilon k_0 x, t'=\varepsilon \omega_0 t},$$

$$(k_0 \equiv |k|_{\omega=\omega_0}) \tag{9}$$

式中， $u=O(d)$ ，引入因子 α 是因弱非线性假设之故。新变量 (x', t') 实际上定义了一组空间与时间的缓变量 (slowly varying variables)：

$$x' = \varepsilon k_0 x, \quad t' = \varepsilon \omega_0 t \tag{10}$$

时空缓变量是对时空的“压缩”操作。例如，在原变量 x 的空间内，单位长度（如间隔 d ）内 ξ 的变化是小量，但是在“压缩”空间 x' 内，单位长度（如一个波长）的变化就不一定是小量。所以，函数 u 对缓变量的导数一般具有量级：

$$\left| \frac{1}{\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x'} \right| = O(1), \quad \left| \frac{1}{\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t'} \right| = O(1) \tag{11}$$

将解的新函数形式 (9) 代入非线性振动方程 (1)，两边同时除以 K_1 ，并利用关系 $\omega_0^2=K_1/M$ ，得到如下关于 u 的方程

$$\alpha \varepsilon^2 K_1 \frac{\partial^2 u(x'_n, t')}{\partial t'^2}$$

$$= F[\alpha(u(x'_n, t') - u(x'_n - \varepsilon k_0 d, t'))] - F[\alpha(u(x'_n + \varepsilon k_0 d, t') - u(x'_n, t'))]$$

对上式右端作关于 α 和 ε 的双元变量泰勒级数展开，并经适当整理得到

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(k_0 d)^2} \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} u(x', t') - \frac{\partial^2}{\partial x'^2} u(x', t') \\
&= \varepsilon k_0 d \left[\frac{\varepsilon k_0 d}{12} \frac{\partial^4}{\partial x'^4} u(x', t') + \alpha \frac{K_2}{K_1} \frac{\partial u(x', t')}{\partial x'} \frac{\partial^2 u(x', t')}{\partial x'^2} \right] \\
&+ O(\alpha \varepsilon^3) + O(\varepsilon^4) \\
&(x' = x'_n = \varepsilon k_0 x_n)
\end{aligned}$$

式中 K_1 和 K_2 的定义见前。相比方程左端，右端是更高阶小量。若略而不计，则上列方程是 u 的一维波动方程，具有行波解，

$$u(x', t') = U\left(\frac{x'}{k_0 d} \mp t'\right) = U(X), \quad \left[X = \varepsilon \left(\frac{x}{d} \mp \omega_0 t\right)\right] \quad (12)$$

与前述线性结果一致。式中，负号“ $-$ ”表示正向传播的解，而“ $+$ ”号表示负向传播的解， U 是行波解的函数形式。所引入的变量 X 涉两种变换：先经伽利略变换，把坐标 x 变换到随波一起行进的新坐标（随动坐标），再对随动坐标作 ε 的空间压缩变换。所以， X 为压缩随动坐标。当略去方程等式右端的高阶小量时， U 仅是压缩随动坐标 X 的单变量函数 $u=u(X)$ ，与时间无关。但是，若计及高阶小量，则 U 不可能仅是 X 的单变量函数，而可能与某种形式的时间有关。只是，前列方程的右端是更高阶的小量： $O(\varepsilon^2)$ ， U 应该是十分微弱地依赖于时间。因此，考虑到平衡方程右端高阶小量的需要，假设 U 取如下形式

$$\begin{aligned}
u(x', t') &= U\left(\frac{x'}{k_0 d} \mp t', \varepsilon^2 t'\right) = U(X, T), \\
\begin{cases} X = \frac{x'}{k_0 d} \mp t' = \varepsilon \left(\frac{x}{d} \mp \omega_0 t\right) \\ T = \varepsilon^2 t' = \varepsilon^3 \omega_0 t \end{cases} & \quad (13)
\end{aligned}$$

代入前列方程，得到如下方程：

$$\mp \varepsilon \frac{\partial U_X}{\partial T} - \frac{1}{24} \varepsilon \frac{\partial^3 U_X}{\partial X^3} - \alpha \frac{K_2}{2K} U_X \frac{\partial U_X}{\partial X} + O(\alpha \varepsilon^3) = 0 \quad (14)$$

其中， $U_X = \partial U / \partial X$ ，正比于质点之间的相对位移：

$$\begin{aligned}
 \xi_{n+1}(t) - \xi_n(t) &= \alpha [U(X_{n+1}, T) - U(X_n, T)] \\
 &\approx \alpha U_X(X_n, T)(X_{n+1} - X_n) = \alpha \varepsilon U_X \\
 &\propto U_X \\
 &(\varepsilon = X_{n+1} - X_n)
 \end{aligned}$$

U_X 的三阶导数项是频散引起的，而第三项是非线性引起的。就数学而言， α 和 ε 是两个独立参量，可任意变化。欲使方程 (14) 成立，必使其中同阶 α 和 ε 项系数之和为零。假如 α 和 ε 不在同一量级，则必有

$$\frac{\partial U_X}{\partial T} = \pm \frac{1}{24} \frac{\partial^3 U_X}{\partial X^3}, \quad U_X \frac{\partial U_X}{\partial X} = 0$$

后者表明， U_X 与空间 X 无关，仅可能是时间的函数。而前者进一步指出， U_X 也与时间无关。此表明阵列质点处于均匀定常的压缩状态，是一种准静态，非为所求。也即，当前的近似不足以求解阵列质点的振动，要精确求解，尚需计及更高阶的小量。另一方面，如果频散与非线性相平衡，即 $\alpha = O(\varepsilon)$ ，则方程 (14) 的前三项处于同一小量级，三者之和必为零：

$$\mp \varepsilon \frac{\partial U_X}{\partial T} - \frac{1}{24} \varepsilon \frac{\partial^3 U_X}{\partial X^3} - \alpha \frac{K_2}{2K} U_X \frac{\partial U_X}{\partial X} = 0$$

既为同量级，在前面定义 α 时，不妨迳取 $\alpha = \varepsilon$ ，而丝毫不影响推导过程和结果。若然，则得到 U 满足的偏微分方程：

$$\pm \frac{\partial}{\partial T} U_X + \frac{K_2}{2K} U_X \frac{\partial U_X}{\partial X} + \frac{1}{24} \frac{\partial^3 U_X}{\partial X^3} = 0 \quad (15)$$

其中“+”号表示正向传播，“-”号表示负向传播。此乃 U_X 的非线性时空演化方程 (equation of evolution) —— Korteweg–de Vries (缩写 KdV) 方程。可见，KdV 方程本身体现了非线性和色散的平衡。

一旦获得 KdV 方程的解，就可得到质点的振动位移解：

$$\xi_n(t) = \varepsilon U \left(\varepsilon \left(\frac{x}{d} \mp \omega_0 t \right), \varepsilon^3 \omega_0 t \right) \Big|_{x=nd} \quad (16)$$

仔细考察推导过程，可以发现小参数 $\alpha = \varepsilon$ 纯粹是为了估算各有关项的量级大小。一旦达到目的，可迳令 $\varepsilon = 1$ 。于是，

$$\xi_n(t) = U \left(\frac{x}{d} \mp \omega_0 t, \omega_0 t \right) \Big|_{x=nd} \quad (17)$$

至此，问题遂转化为求解 **KdV 方程** (15)。

四、KdV 孤子解

KdV 方程 (15) 允许有稳态的非线性波动解，其中一类即所谓的**孤波**。孤波乃空间局域化的波动，存在于局部空间区域。多个孤波相遇可发生相互作用（追赶，碰撞等）。若相互作用前后各孤波保持其特征（“身份”）不变，则称此类孤波为孤子。KdV 孤波是孤子。关于孤子，参见本博博文《孤波与孤子》的简介。由于 KdV 方程是弱频散与弱非线性相平衡而导出的，所以 **KdV 孤子是弱频散与弱非线性动态平衡的结果**。

可以直接验证，方程 (15) 具有如下的正向行波单孤子解：

$$U_X = \frac{K}{K_2} \kappa^2 \operatorname{sech}^2 \kappa \left(X - X_0 - \frac{1}{6} \kappa^2 T \right) \quad (18)$$

式中 X_0 是初始位置， κ 是任意的常数，描述了孤子幅度的大小。对解积分一次，并考虑到 $n \rightarrow \infty$ 处质点振动位移为零的边界条件，代入公式 (17)，从而得到质点位移解

$$\xi_n(t) = \frac{K_1}{K_2} \kappa \left\{ \tanh \kappa \left[\frac{x_n}{d} - \left(1 + \frac{1}{6} \kappa^2 \right) \omega_0 t - X_0 \right] - 1 \right\} \quad (19)$$

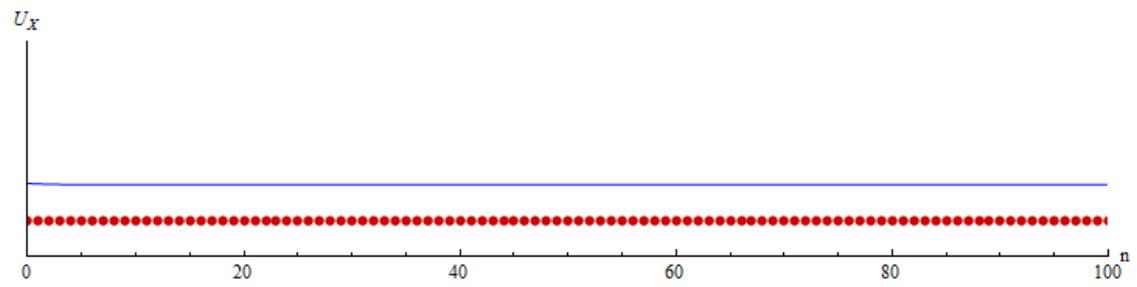
由于 κ 可取任意值，孤子的幅度可大可小。这实际上是一个扭结孤子，其传播速度为：

$$c_s = \omega_0 d \left(1 + \frac{1}{6} \kappa^2 \right)$$

比线性波的传播速度 c 大，而且与孤子的波幅 (κ) 的平方成正比。所以，孤子幅度越大（“长”得高），传播越快。下图是孤子的传播过程，蓝色曲线表示 U_X ，而红色圆点表示质点阵列及其运动。要提醒的是，质点阵列的运动表现为质点阵列的压缩和稀疏，故而此种孤波是弹性纵波。根据公式 (19)，孤波经过后，每个质点都发生一个负方向的位移：

$$\xi_n(\infty) - \xi_n(-\infty) = 2\kappa \frac{K_1}{K_2}$$

当 $\kappa \rightarrow 0$ 时， c_s 趋向线性波的低频速度 $c \approx \omega_0 d$ 。公式 (19) 所表达的孤子解，是非对称弹性力作用的结果。



图二、孤子的传播。红色小球：质点及其位移 \square_n ，蓝色曲线：相对位移 U_x 。

关于 KdV 方程 (15) 的多孤子解，甚至周期解，超出本文所及。有兴趣者可参阅有关文献与书籍。

引自: <http://xlwangnu.blog.163.com/blog/static/190719270201251955216838/>

非线性自由振动

Free nonlinear vibration

南京大學聲學研究所 王新龍

质点之为简谐振动，力之线性使然也；否则，振动不复简谐，且现谐振子所无之新特点。然而，欲图构建非线性振动的精确理论，何其难哉！即有幸获得适用有限范围之渐近解析解，其对非线性振动往往只知其一而未知其二，缺乏整体把握。所幸者，本文所讨论的立方非线性振动系统，乃少数可获精确解析解之例。文中还讨论了重要的非线性效应以及一些普适的结论。

设质点位移为 ξ ，质点所受的弹性力 F 与其位移 ξ 之间一般存在非线性函数关系： $F=F(\xi)$ ，而且往往具有反对称性： $F(-\xi)=-F(\xi)$ ，即在平衡位置 ($\xi=0$) 两侧，弹性力大小相等，方向相反，皆指向平衡位置。或许，最简单的非线性弹性力是：

$$F = -K_1\xi - K_3\xi^3$$

其中， $K_1 > 0$ 是线性弹性系数， K_3 是立方非线性弹性系数。与 K_1 不同， K_3 可正可负。正者表明非线性增强了弹性，故称此类弹簧为**硬弹簧**；负者表明非线性削弱弹力，称此类弹簧被为**软弹簧**。譬如，单摆质量所受力为 $F = -Mg\sin\theta$ 。当单摆的摆角 θ （视作位移 ξ ）不小也不大时 $\sin\theta \approx \theta - \theta^3/6$ ， $F \approx -Mg\theta + (1/6)Mg\theta^3$ 。所以，非线性单摆在摆幅不很大之时属于“软弹簧”振子。也可把上式改写成如下形式

$$F = -K_1\xi(1 + \kappa\xi^2), \quad \left(\kappa \equiv \frac{K_3}{K_1} \right) \quad (1)$$

假设质点 M 仅受弹力作用，则其运动方程为

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \omega_0^2\xi(1 + \kappa\xi^2) = 0, \quad \left(\omega_0^2 = \frac{K_1}{M} \right)$$

此正是本文所要考察的具有立方非线性的自由振动方程，其中 ω_0 是线性 ($\kappa=0$) 谐振频率， t 是时间。在非线性研究中，消去冗余参数是良好的习惯，不但可以简化系统，而且有益于突出系统的非线性。对此微分方程作如下变量变换，

$$x = \sqrt{|\kappa|}\xi, \quad \tau = \omega_0 t$$

结果，振动方程化为

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + x(1 + \sigma x^2) = 0, \quad [\sigma = \text{sgn}(\kappa), |\sigma| = 1] \quad (2)$$

其中消去了 x_0 和 $|\kappa|$ 。参数 σ 取 κ 的正负号，要么+1（硬弹簧），要么-1（软弹簧）。当然， $\sigma=0$ 对应线性弹簧。

平衡点，相轨道和能量守恒

根据微分关系，

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = u \frac{du}{dx}, \quad \left(u = \frac{dx}{d\tau} \right)$$

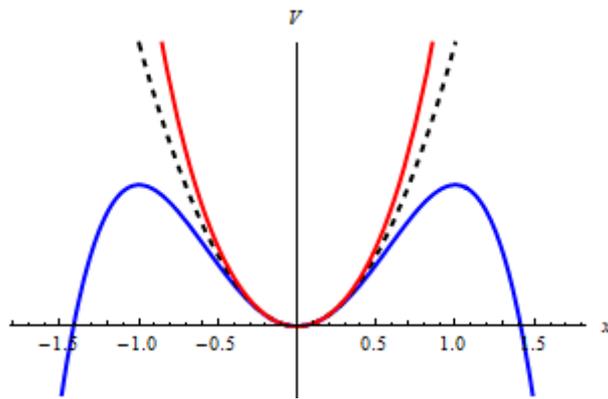
代入方程（2），并对其积分，得到首次积分方程

$$\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{1}{2}\sigma x^4\right) = E \quad (3)$$

此乃系统能量守恒之数学表达，积分常数 E 是单位质量的总能量，等式左端第一项是质点动能，第二项是弹性力所引起的弹性势能为

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}\sigma x^4$$

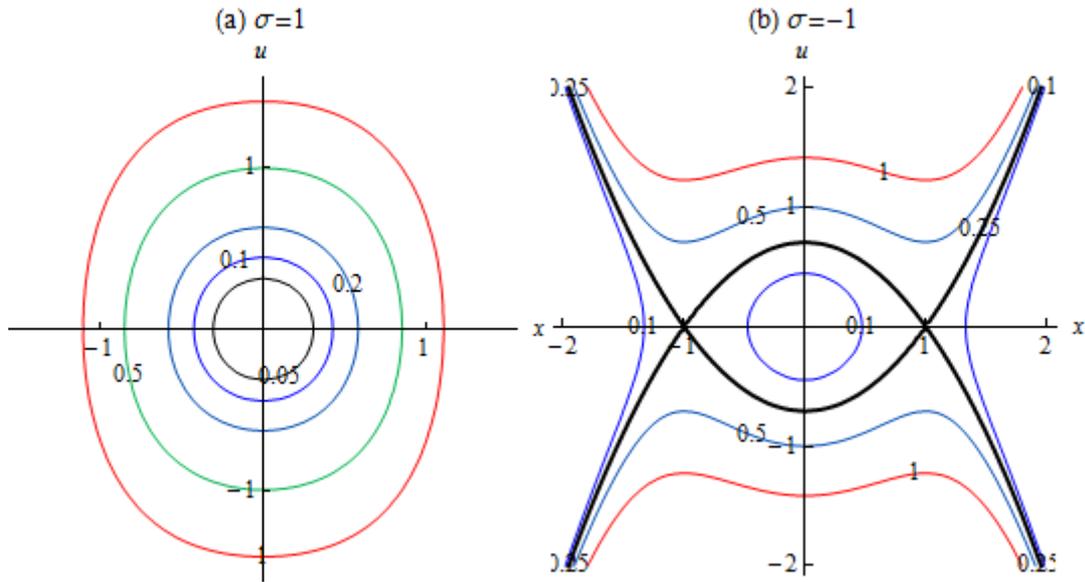
下图给出了不同弹簧的势能形状。硬弹簧的势能曲线（红线）比线性弹簧的（黑虚线）更陡峭，说明非线性增强了弹性。软弹簧的势能曲线（蓝线）则不然。而且，软弹簧势能曲线出现两个对称的极大值位置： $x_0 = \pm 1$ 。它们是除了 $x_0 = 0$ 之外的速度和加速度可同时为零的**新平衡位置**。在新平衡位置，弹力的线性恢复力部分与非线性排斥力部分相互制衡，使软弹簧处临界态：如果 $|x| > |x_0|$ ，则排斥力胜于回复力，质点之运动不复为振动。



虚线—— $\sigma=0$ ，红线—— $\sigma=+1$ ，蓝线—— $\sigma=-1$

首次积分方程（3）给出了 (x, u) 二维相空间中的质点运动轨道。对于线性弹簧， $\sigma=0$ ，方程给出的是 (x, u) 相空间的圆轨道。非线性的引入，使得相轨道

不复呈圆形。下图 (a) 是硬弹簧的相空间轨道，而 (b) 是软弹簧的相空间轨道。



相空间轨道：(a) 硬弹簧，(b) 软弹簧。能量 E 的取值标于轨道曲线上。

从图中可见，硬弹簧的轨道形状与线性的圆轨道相差无几。然而，软弹簧的轨道则显著不同。对软弹簧 ($\sigma=-1$)，方程 (3) 也可表成：

$$u^2 - \frac{1}{2}(x^2 - 1)^2 = 2E - \frac{1}{2} \quad (4)$$

显然，如果 $E=1/4$ ，方程右端为零，此方程退化为两条抛物线：

$$u = \pm \frac{x^2 - 1}{\sqrt{2}}$$

即上图 (b) 的两条粗黑曲线。它们互交于 x 轴的 $x_0=-1$ 和 $+1$ 的两点。显然，在交点处 du/dx 是双值的（奇点）。事实上，这两条抛物线是有界的周期振动与无界的非周期运动的分界线（separatrix）。在此分界线之内（ $E < 1/4$ ），相轨道（如蓝色的近圆曲线）是闭合的，质点作振动（oscillating）；在此之外（ $E > 1/4$ ），相轨道不复闭合（如红色轨道），质点的运动是无界的，即系统已非复振荡型（non-oscillating）。因此，就振动而言，所关心的是 $E < 1/4$ 的情形。当然，即使 $E < 1/4$ ，也存在远离零平衡位置的轨道，如上图 (b) 左右两侧呈双曲状的（蓝）轨道；在这些轨道上，质点 M 的运动同样是非振荡的，亦非本文所关心者。

椭圆函数解

(1) 硬弹簧： $\sigma=1$

把 $u=dx/d\tau$ 代入首次积分公式 (3)，并稍作处理，

$$2\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 = (1+a^2)^2 - (1+x^2)^2$$

其中，引入了取代能量 E 的实参数 a ：

$$a \equiv \sqrt{\sqrt{1+4E}-1}, \quad (0 < a < \infty) \quad (5)$$

在前列方程中，等式左端非负，故必有 $x \leq a$ ，即 a 是质点振动的振幅。作变量变换： $x \rightarrow y$ ，

$$x^2 = a^2(1-y^2), \quad \left(0 < y^2 < 1, \frac{dx}{d\tau} = -a^2 \frac{y}{x} \frac{dy}{d\tau}\right) \quad (6)$$

可把位移 $x(\tau)$ 归一化为 $y(\tau)$ 。代入首次积分方程，得到 $y(\tau)$ 满足的方程

$$\left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 = \omega^2(1-y^2)(1-k^2y^2) \rightarrow \omega d\tau = \pm \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}$$

式中，新参数 ω 和 k 定义为：

$$\omega \equiv \sqrt{1+a^2}, \quad k \equiv \frac{a}{\sqrt{2\omega}}, \quad \left(\omega > 1, 0 < k < \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad (7)$$

（注意区别 ω 与文章开头所属的线性自由振动频率 ω_0 ）。对前列微分方程从初始时刻 $\tau = 0$ 积分，得到积分方程：

$$\omega\tau = \pm \int_{y(0)}^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} \quad (8)$$

假定初始时刻 $y(0)=0$ ，即 $x(0)=\pm a$ （初始时刻质点处于最大位移），则上式的反演正是模量为 k 的第一类雅可比椭圆正弦函数 **sn【1】**，

$$y = \text{sn}(\omega\tau; k), \quad \left(\omega \equiv \sqrt{1+a^2}\right)$$

代入（6），最终得到位移的非线性解析解：

$$x = \pm a \sqrt{1 - \text{sn}^2(\omega\tau; k)} = \pm a \text{cn}(\omega\tau; k) \quad (9)$$

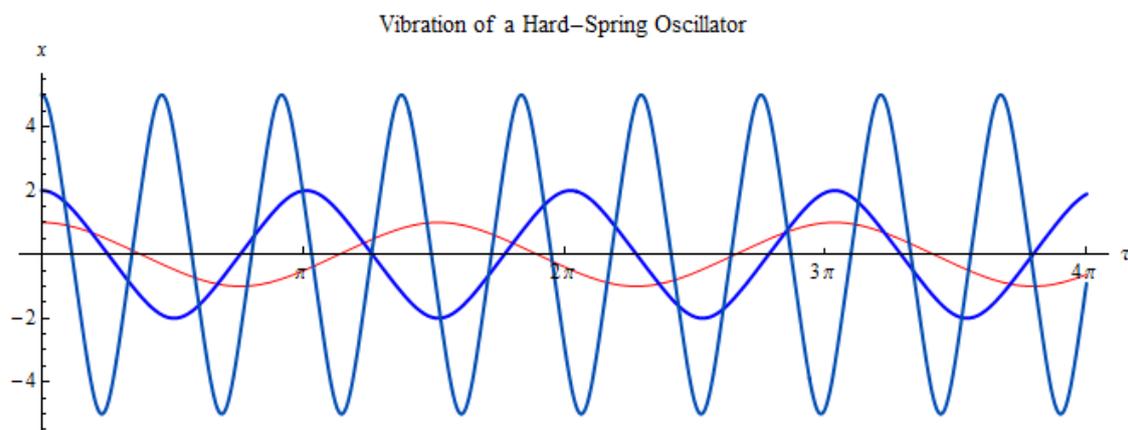
其中利用了 **sn** 和 **cn** 函数之间的恒等关系： $\text{sn}^2(x;k) + \text{cn}^2(x;k) = 1$ 。对于微振动，根据椭圆函数的极限性质，有

$$\lim_{a \rightarrow 0} \text{cn}(\omega\tau; k) = \cos \tau$$

公式（9）于是趋近线性简谐振动解。

下图（左图）画出了根据公式（9）（取“+”号的解）计算得到的不同振幅 a 的振动时域波形。由图可见，小振幅 a 振动时，周期 T 几为 2π 。随着振幅 a 的增

大，周期 T 缩短，波形也有不易察觉的畸变。**波形畸变表明高次谐波出现**。而周期缩短（频率增高）是硬弹簧的特点。



硬弹簧的振动波形， a 分别取值：1（红色），2（蓝色），5（青色）

(2) 软弹簧： $\sigma = -1$

前已述及，软弹簧要保持振动状态，必须有 $E < 1/4$ 。作为 E 的替代参数，另定义实常数 a

$$a = \sqrt{1 - \sqrt{1 - 4E}} \quad (11)$$

如此，软弹簧的首次积分方程（4）可表为

$$u^2 = \frac{1}{2}(1 - x^2)^2 - \frac{1}{2}(1 - a^2)^2$$

可见，在振速 $u=0$ 的位置， $x = \pm a$ ，即 a 是质点的振幅。据此，对位移作归一化操作， $x=ay$ ($|y| < 1$)。于是，上列方程进一步变换为

$$\xrightarrow{x=ay} \left(\frac{dy}{d\tau} \right)^2 = \omega^2 (1 - y^2)(1 - k^2 y^2)$$

从而得到如下积分方程

$$\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - k^2 y^2)}} = \pm \omega \tau \quad (12)$$

其中，已经假定 $x(0)=y(0)=0$ 。此处，对软弹簧也定义了类似的 ω 和 k 参数：

$$\omega \equiv \sqrt{1 - \frac{1}{2}a^2}, \quad k \equiv \frac{a}{\sqrt{2\omega}} \quad (13)$$

方程 (12) 具有如下椭圆正弦函数解

$$y = \pm \operatorname{sn}(\omega\tau; k), \quad x = ay \quad (14)$$

若令

$$E = \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi = \frac{1}{4} \sin^2 2\varphi$$

而用角度参数 φ 替代能量参数 E , 则公式 (11) 和 (13) 所定义参数悉可用 φ 表达:

$$k = \tan \varphi, \quad a = \sqrt{2} \sin \varphi, \quad \omega = \cos \varphi$$

而解析解 (14) 可表为

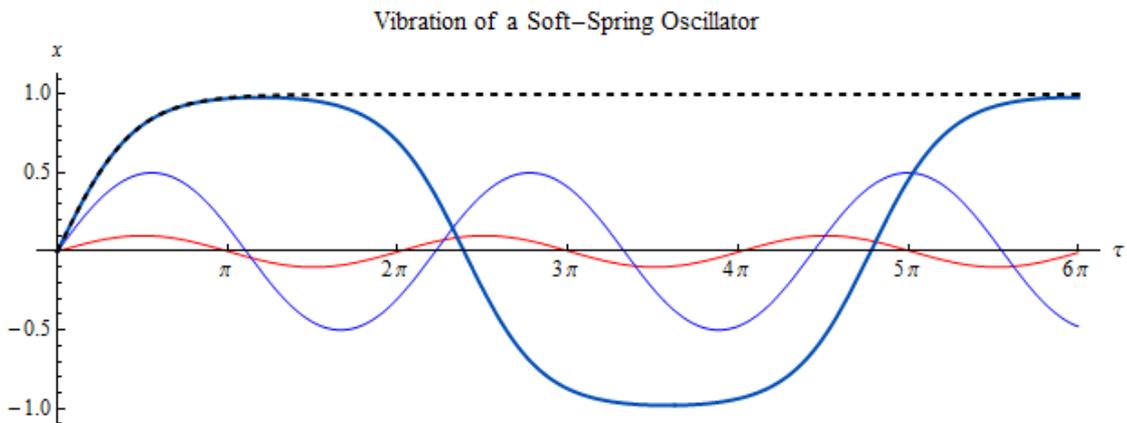
$$x = \pm a \cdot \operatorname{sn}(\tau \cos \varphi, \tan \varphi)$$

在小振幅极限下, $a \rightarrow 0$ ($\varphi \rightarrow 0$), 而

$$\lim_{a \rightarrow 0} x = \pm \lim_{\varphi \rightarrow 0} a \cdot \operatorname{sn}(\tau \cos \varphi, \tan \varphi) = \pm a \sin \tau$$

与线性结果一致。

下图是根据公式 (14) (取“+”号的解) 画出的振动波形。可见, 小振幅振动 (红线) 的周期 T 近乎 2π 。但是, 随着振幅 a 的增大, 波峰变得平坦, 周期 T 变长。振幅 $a = 1$ 的振动是临界状态 (虚线)。当质点从平衡点 $x=0$ 运动到 $x=1$ 时, 速度愈来愈慢, 最后在 $x=1$ 的位置近乎不动。但如上所述, $x=1$ 是不稳定的平衡位置, 任意微扰都将促使质点 M 远离此平衡点: 或返回 $x=0$ 的平衡点, 或趋向无穷远。



软弹簧的振动波形, 振幅 a 分别取值: 0.1 (红), 0.5 (蓝), 0.98 (青), 1 (虚线)

振动周期

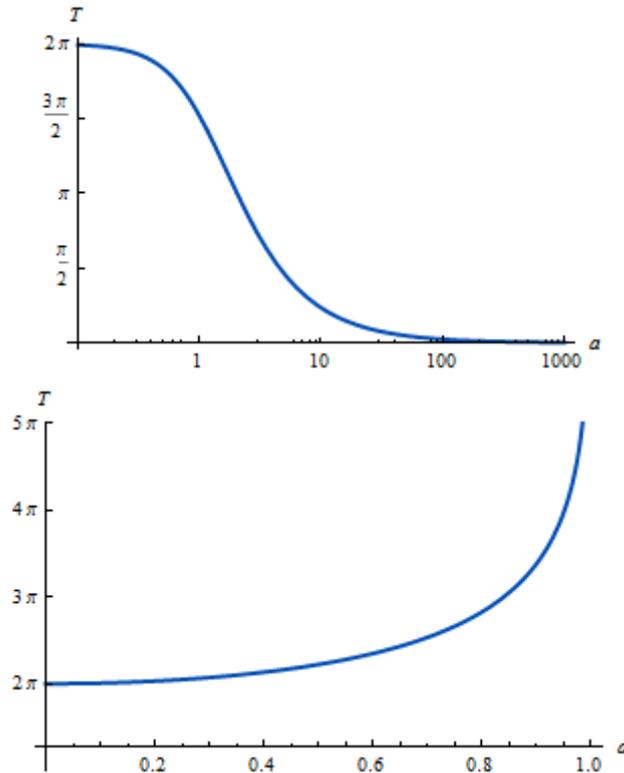
无论 cn 还是 sn 函数，周期皆为 $4K(k)$ ，其中 K 是全椭圆积分

$$K(k) = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}$$

因此从公式 (9) 和 (14) 知，硬弹簧和软弹簧振子的周期皆为：

$$T = \frac{4K(k)}{\omega} \quad (10)$$

只是，式中的 ω 和 k 分别由公式 (7) 和 (13) 给出。分别代入公式 (7) 和 (13) 给出的 ω 和 k ，得到周期 T 对振幅 a 的依赖关系，如下图所示。注意，此处的周期 T 是相对无量纲时间 τ 而言。对原时间 t 而言，周期当为 T/ω_0 。从如图所示，硬弹簧振子的周期（频率） T 是振幅 a 的单调减（增）函数；振幅 a 越大，周期 T 越短，乃至趋于零；相反，软弹簧振子的周期（频率）是振幅的单调增（降）函数，振幅 a 越大，周期越长，当 $a \rightarrow 1$ 时，周期趋于无穷。



左图：硬弹簧振子振动周期，右图：软弹簧振子的周期。

在小振幅 a 下，公式 (10) 可作级数展开，

$$\frac{T}{2\pi} = \frac{2K(k)}{\pi\omega} = \begin{cases} 1 - \frac{3}{8}a^2 + \frac{57}{256}a^4 - \frac{315}{2048}a^6 + \dots, & (\sigma=1) \\ 1 + \frac{3}{8}a^2 + \frac{57}{256}a^4 + \frac{315}{2048}a^6 + \dots, & (\sigma=-1) \end{cases}$$

结论

至少可从以上分析得出以下结论：

- 1、随着振幅的增大，非线性的效应变得显著；
- 2、由于非线性效应，质点振动出现高次谐波；
- 3、自由振动频率不再是常数，而与振幅相关。硬弹簧频率随振幅增大而增高；相反，软弹簧频率随振幅增大而降低。

值得指出，这些结论具有普适性。

【1】王竹溪、郭敦仁著《特殊函数概论》第十章。

暂未分类的博文

引自: <http://xlwangnu.blog.163.com/blog/static/190719270201272412556592/>

声波方程的洛伦兹变换

Sound Wave Equation and Its Lorenz Transform

南京大學聲學研究所 王新龍

狭义相对论中，[洛伦兹变换](#)描述时空惯性参考系的时间和空间坐标之间的变换关系，最早由[洛伦兹](#)从以太说推出，用以解决经典力学与经典电磁学之间的矛盾，后被爱因斯坦用于狭义相对论。洛伦兹变换同样适用于声学，特别是处理运动声源或运动媒质的声辐射问题。本文证明声波方程在洛伦兹变换下形式不变，并以亚音速运动点声源的辐射为例说明其应用。

设有时空参照系， $\mathbf{S} = (x, y, z, t)$ ，其中流体的标准声波方程具有如下的形式，

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} q(x, y, z, t) \quad (1)$$

其中 p 表示声压， ρ_0 和 c_0 是媒质静密度和声速， q 是点声源的体积流函数。在笛卡尔坐标系中，拉普拉斯算符表为

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2)$$

引入速度势，

$$\mathbf{v} = -\nabla\Phi$$

则声压与速度势存在关系

$$p = \rho_0 \frac{\partial\Phi}{\partial t}$$

代入波动方程，得到速度势满足的波动方程

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -q(x, y, z, t) \quad (3)$$

洛伦兹变换：

$$\xi = x, \eta = y, \zeta = \gamma(z - Vt), \tau = \gamma\left(t - \frac{M}{c_0}z\right) \quad (4a)$$

把 S 参照系变换到新的时空参照系 $\Sigma = (\xi, \eta, \zeta, \tau)$ ，其中 V 是任意的实常数（相当于新参照系相对于旧参照系的运动速度）， M 是马赫数， γ 是洛伦兹因子：

$$M = \frac{V}{c_0}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - M^2}}$$

其反变换为

$$x = \xi, y = \eta, z = \gamma(\zeta + V\tau), t = \gamma\left(\tau + \frac{M}{c_0}\zeta\right) \quad (4b)$$

下文仅讨论亚音速情形，即 $M < 1$ 。如此，洛伦兹因子 γ 是实数。

通过变换 (4a)，新旧参照系具有如下的时空微分关系

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\partial \tau}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \tau} = \gamma \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{M}{c_0} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial \zeta}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \zeta} = \gamma c_0 \left(\frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial \tau} - M \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \end{aligned}$$

利用这些微分关系不难验证，达朗贝尔微分算符变换变换为：

$$\begin{aligned} \nabla^2 - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \gamma^2 \left[\left(\frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{M}{c_0} \frac{\partial}{\partial \tau} \right)^2 - \left(\frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial \tau} - M \frac{\partial}{\partial \zeta} \right)^2 \right] \\ &= \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \gamma^2 (1 - M^2) \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \\ &= \nabla_{\Sigma}^2 - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \end{aligned}$$

式中，

$$\nabla_{\Sigma}^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}$$

是 Σ 参照系中的拉普拉斯算符。可见，在洛仑兹变换下，达朗贝尔算符形式保持不变。所以，无源波动方程的形式不变。对于有源波动方程（1），情况略有不同。由于源项存在时间导数，故洛仑兹变换（4）会引起源项形式的改变。但是，速度势 Φ 所满足的有源波动方程（3）则仍保有其原有形式：

$$\nabla_{\Sigma}^2 \Phi - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} = -q(\xi, \eta, \zeta, \tau)$$

其中 q 是经洛仑兹变换（2b）得到的在 Σ 参照系中的源流函数。

试以[匀速运动的点声源](#)所辐射的声场为例，说明洛仑兹变换的应用。设点声源沿 z 轴以速度 V 运动，则源函数

$$q(x, y, z, t) = Q(t) \delta(x) \delta(y) \delta(z - Vt)$$

所辐射声场的速度势满足波动方程

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -Q(t) \delta(x) \delta(y) \delta(z - Vt)$$

对此方程作洛仑兹变换（4），则上列方程变换为

$$\nabla_{\Sigma}^2 \Phi - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} = -\gamma Q(\gamma\tau) \delta(\xi) \delta(\eta) \delta(\zeta)$$

其中利用了 δ 函数的性质： $\delta(\zeta/\gamma) = \gamma \delta(\zeta)$ 。在新坐标系下，源是静止的，源函数为 $\gamma Q(\gamma\tau)$ ，所以所辐射的声场是球面波，速度势解为

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta, \tau) = \frac{1}{4\pi R} \gamma Q \left[\gamma \left(\tau - \frac{R}{c_0} \right) \right]$$

$$\left(R = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} \right)$$

利用变换（4a）恢复旧参照系并稍经整理，得到运动点声源的速度势解

$$\Phi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi R_1} Q \left(t - \frac{1}{c_0} \frac{R_1 + M(z - Vt)}{1 - M^2} \right)$$

$$\left(R_1 = \sqrt{(1 - M^2)(x^2 + y^2) + (z - Vt)^2} \right)$$

与《[运动点声源的辐射](#)》一文所求得的公式（8）一致（注意，此处所定义的速度势与彼处的相差一个负号）。

<http://xlwangnu.blog.163.com/blog/static/19071927020111157312955/>

聲偶極子

Acoustical Dipole

南京大學聲學研究所 王新龍

聲偶極子由兩個源強相等、相位相反的點源構成，是聲輻射的基本單元。與點源一樣，聲偶極子也是一類實際聲源的數學抽象；軸向振動的球聲源即為偶極子之實例。比之點源，偶極子輻射聲場相對複雜，呈指向性，且輻射阻比輻射抗更小。本文詳述聲偶極子理論，強調偶極子的輻射性能和聲能分佈特性。

略去時間因子 $\exp(j\omega t)$ ，則頻率 ω 、源強 Q_0 之點聲源所輻射的穩態速度勢 Φ 和聲壓 p 可表為

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{Q_0}{4\pi r} e^{-jk r}, p(\mathbf{r}) = j\omega\rho_0\Phi(\mathbf{r}) \quad (1)$$

式中， $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ 分別為觀測點和源點空間位置坐標矢量， r 是源點到場點的距離， $k = \omega/c_0$ 是波數， ρ_0 和 c_0 分別是媒體靜態質量密度和聲速。用第二類零階球漢克爾（spherical Hankel）函數 $h_0(z)$ 表示，則

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{kQ_0}{4\pi j} h_0(kr), \left(h_0(z) = -\frac{1}{jz} e^{-jz} \right) \quad (2)$$

現設有兩個點源，分別位於

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1) = \mathbf{r}_0 - \frac{1}{2} \mathbf{d} \\ \mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2) = \mathbf{r}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{d} \end{cases}, (\mathbf{d} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$$

其中 $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ 是兩者之間的中心位置矢量， \mathbf{d} 是兩者連線矢量（極軸矢量）。假設兩源的源強相同，但位相相反，即 $Q_1(t) = -Q_2(t) = Q(t) = Q_0$ ，且兩者間距 $d = |\mathbf{d}| \ll \lambda = 2\pi/k$ ($kd \ll 1$)。如此一對極性相反的點源構成的複合聲源，即為聲偶極子（dipole），其速度勢場 Φ 為兩點源分別產生的聲場 Φ_1 和 Φ_2 之疊加：

$$\begin{aligned}
\Phi(r) &= \Phi_1(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|) + \Phi_2(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|) \\
&= \frac{kQ_0}{4\pi j} \left[h_0 \left(k \left| \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{d} \right| \right) - h_0 \left(k \left| \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - \frac{1}{2} \mathbf{d} \right| \right) \right] \\
&= \frac{kQ_0}{4\pi j} \left[h'_0(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|) \nabla |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \cdot (k\mathbf{d}) + O(kd)^3 \right] \\
&= \frac{k^2}{4\pi j} \left[h'_0(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|) \mathbf{P} \cdot \nabla |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| + O(kd)^3 \right] \\
&\quad (\mathbf{P} \equiv Q_0 \mathbf{d})
\end{aligned}$$

式中， \mathbf{P} 稱為**偶極子強度**矢量。偶極子強度的方向沿偶極子軸（極軸）。若 $kd \rightarrow 0$ ，而偶極子強度 \mathbf{P} 保持有限，並注意到球漢克爾函數的導數性質： $h'_0 = -h'_1$ ，得到偶極子聲場的解析表達式

$$\Phi(r) = -\frac{k^2}{4\pi j} h_1(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|) (\mathbf{P} \cdot \nabla |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|) \quad (3a)$$

式中最後的括號因子表示偶極子矢量在矢徑 $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ 方向上的投影： $|\mathbf{P}| \cos \theta$ ，角度 θ 是偶極子極軸與矢徑 $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ 之間的角度。可見，偶極子聲場具有指向性。為描述方便起見，設偶極子位於 z 坐標軸上，其中心位於坐標原點： $\mathbf{r}_0 = 0$ 。如此， θ 就是場點的極角。如此，方程（3）用球坐標表示如下：

$$\Phi(r) = -\frac{k^2}{4\pi j} |\mathbf{P}| h_1(kr) \cos \theta, \quad (r = \|\mathbf{r}\|, |\mathbf{P}| = Q_0 d) \quad (3)$$

此為一般軸對稱球形聲源輻射級數解中一階勒讓德函數所對應項，可由表面振速按 $\cos \theta$ 分佈的球源產生（見下）。

根據（3），得到聲壓場 p ，以及徑向和極角方向的速度分量 v_r 和 v_θ ：

$$\begin{aligned}
p &= j\omega\rho_0\Phi(r) = -\rho_0 c_0 \frac{k^3}{4\pi} |\mathbf{P}| h_1(kr) \cos \theta, \\
v_r &= -\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{k^3}{4\pi j} |\mathbf{P}| h'_1(kr) \cos \theta \\
v_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \frac{jk^2}{4\pi r} |\mathbf{P}| h_1(kr) \sin \theta
\end{aligned} \quad (4)$$

利用球漢克爾函數的漸近性質，有如下遠場（ $kr \gg 1$ ）漸近近似，

$$\begin{aligned}
p &\xrightarrow{kr \rightarrow \infty} k^2 \rho_0 c_0 \frac{e^{j(at-kr)}}{4\pi r} |\mathbf{P}| \cos \theta \\
v_r &\xrightarrow{kr \rightarrow \infty} k^2 \frac{e^{j(at-kr)}}{4\pi r} |\mathbf{P}| \cos \theta \\
v_\theta &\xrightarrow{kr \rightarrow \infty} -jk \frac{e^{j(at-kr)}}{4\pi r^2} |\mathbf{P}| \sin \theta
\end{aligned} \quad (4a)$$

可見，遠場徑向速度與聲壓的關係與平面聲波的近似。

偶極子與軸向振動小球

偶極子的最簡單實現途徑是振動小球。設有位於源點、半徑為 a 的球，沿 z 軸向作簡諧振動、振速幅度為 u_a 的球。此振動球輻射的聲場為

$$p = -j\rho_0 c_0 u_a \frac{h_1(kr)}{h_1'(ka)} \cos \theta$$

比較公式 (3) 知，此振動球所輻射的聲場是偶極子聲場，其偶極子強度為

$$|\mathbf{P}| = -\frac{4\pi}{k^3} \frac{u_a}{jh_1'(ka)} \approx (-\pi a^2 u_a) 2a = (-4\pi a^2 u_a) \left(\frac{a}{2}\right), \quad (ka \ll 1)$$

相當於由兩個相距 $(a/2)$ 、流量各為 $Q_a = 4\pi a^2 u_a$ 、反相的脈動小球構成。

輻射聲能與非輻射聲能

根據 (3) 和 (4)，求得偶極子的徑向和極角方向的聲強分別為

$$\begin{aligned}
I_r &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(p^* v_r) = \frac{1}{2} \rho_0 c_0 \left(\frac{k^2 |\mathbf{P}| \cos \theta}{4\pi r} \right)^2 \\
I_\theta &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(p^* v_\theta) = 0
\end{aligned} \quad (5)$$

可見，不存在非徑向的聲能流。相應的輻射功率為

$$\overline{W} = \int_0^\pi I_r 2\pi r^2 \sin \theta d\theta = \frac{k^4 \rho_0 c_0}{24\pi} |\mathbf{P}|^2 \quad (6)$$

值得注意，偶極子的輻射功率與頻率的四次方成正比，而點源的輻射功率與頻率的平方成正比。故而，偶極子低頻輻射效率極低。

偶極子聲場的平均聲能密度可分為兩部分：

$$\varepsilon = \varepsilon_r + \varepsilon_{nr}, \begin{cases} \varepsilon_r = \frac{1}{2} \rho_0 \left(\frac{k^2 |\mathbf{P}| \cos \theta}{4\pi r} \right)^2 \\ \varepsilon_{nr} = \frac{1}{4} \rho_0 \left(1 + \frac{1 + 3 \cos^2 \theta}{k^2 r^2} \right) \left(\frac{k |\mathbf{P}|}{4\pi r^2} \right)^2 \end{cases} \quad (7)$$

與聲強公式比較知，

$$I_r = \varepsilon_r c_0$$

所以， ε_r 是輻射出去的能量密度，而 ε_{nr} 則是非輻射的能量密度。以偶極子中心為球心，沿徑向單位厚度的球殼上，可輻射的能量

$$E_r = \int_0^\pi \varepsilon_r 2\pi r^2 \sin \theta d\theta = \frac{\rho_0}{24\pi} |k^2 \mathbf{P}|^2 \quad (8)$$

是常量，與徑向距離 r 無關，而非輻射的聲能

$$E_{nr} = \int_0^\pi \varepsilon_{nr} 2\pi r^2 \sin \theta d\theta = \frac{\rho_0}{16\pi} \left(1 + \frac{2}{k^2 r^2} \right) \left(\frac{k |\mathbf{P}|}{r} \right)^2 \quad (9)$$

高度依賴於徑向距離 r ，在偶極子中心發散。兩者之比

$$\frac{E_{nr}}{E_r} = \frac{3}{k^4 r^4} + \frac{3}{2k^2 r^2}$$

輻射阻抗与辐射质量

利用偶極子與振動小球的等效性，可以通過振動小球求偶極子的聲輻射阻抗。注意到極軸對稱性，聲場作用在振動小球上的合力僅沿極軸方向非零，而振動速度應等於 $\theta=0$ 、 $r=a$ 處的流體速度：

$$-F_z = - \iint_{r=a} p \cos \theta dS = \frac{1}{3} k \rho_0 c_0 (ka)^2 |\mathbf{P}| h_1(ka)$$

$$u_a = v_r|_{\theta=0, r=a} = - \frac{jk^3}{4\pi} |\mathbf{P}| h_1'(ka)$$

因此得到輻射阻抗為

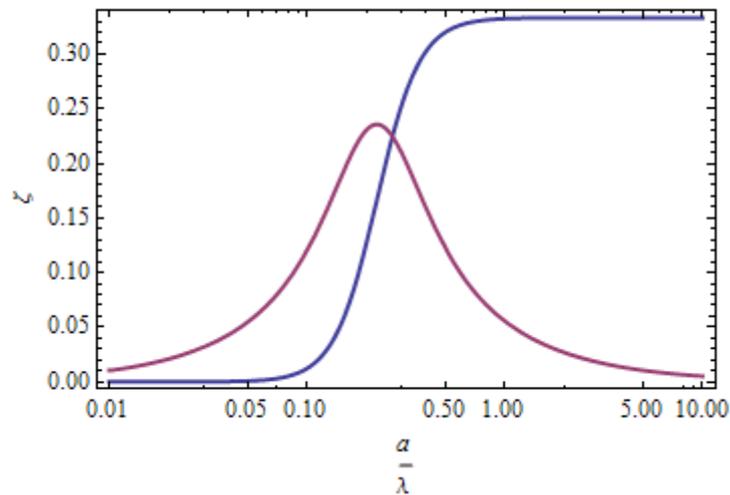
$$Z_r = \frac{F_z}{u_a} = R_r + jX_r = \rho_0 c_0 S_0 (\xi + j\eta) = \frac{1}{3} \rho_0 c_0 S_0 \frac{h_1(ka)}{jh_1'(ka)}$$

$$\begin{cases} \xi_r = \frac{1}{3} \frac{(ka)^4}{4 + (ka)^4} \xrightarrow{ka \ll 1} \frac{1}{3} (ka)^4 \\ \eta_r = \frac{1}{3} (ka) \frac{2 + (ka)^2}{4 + (ka)^4} \xrightarrow{ka \ll 1} \frac{1}{6} ka \end{cases}, (S_0 = 4\pi a^2)$$

(10)

下圖一繪出了聲輻射阻抗與 (a/λ) 的關係 ($\lambda=2\pi/k$)。由此可見，若 $a \ll \lambda$ ，輻射阻遠小於輻射抗。此正說明了偶極子是抗性極強的聲源，所產生的聲能多駐留在源周圍。

$\zeta = \xi + j\eta$, ξ -Blue, η -Red



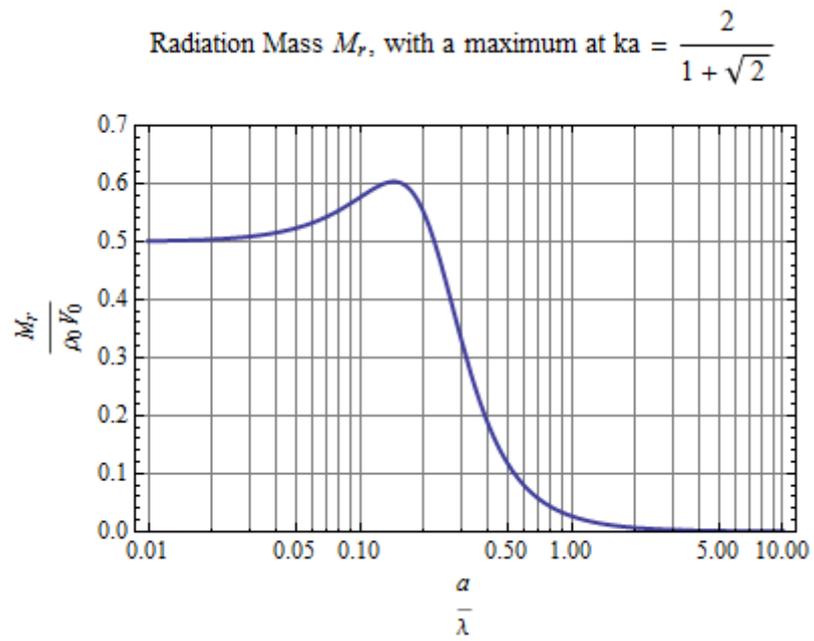
圖一、輻射阻抗曲線

據 (10) 可知，聲偶極子具有輻射（同振）質量

$$M_r = \frac{X_r}{\omega} = \frac{\rho_0 c_0 S_0 \eta_r}{\omega} = \frac{1}{2} \rho_0 V_0 \frac{1 + \frac{1}{2} k^2 a^2}{1 + \frac{1}{4} k^4 a^4}, \left(V_0 = \frac{4}{3} \pi a^3 \right)$$

$$\xrightarrow{ka \rightarrow 0} \frac{1}{2} \rho_0 V_0$$

下圖二繪出了輻射質量與 (a/λ) 的關係曲線，其在 $ka \approx 0.8282$ 處達到極大值。有趣的是，若 $ka \rightarrow 0$ ，則輻射質量趨於有限值——半徑為 a 的球所排開的流體質量之半。流體力學中，此低頻極限值就是流體的誘導質量【1】：當球以速度 u_a 作勻速運動時，因此誘導質量之存在，球的有效質量變大。



圖二、歸一化有效質量與 (a/λ) 的關係

【1】參見朗道《流體力學》上冊第 45 頁。

引自: <http://xlwangnu.blog.163.com/blog/static/190719270201211137223678/>

相速与群速

Phase Velocity and Group Velocity

南京大学声学研究所 王新龙

频散效应为诸多声学媒质和结构所具有的重要性质。由于声速是频率的函数，不同频率的声波以不同的相速度传播；如此，两个不同频率的声波序列经长时间必相互散开。又，很多声波信号往往以波群的形式存在，其中包含诸多频率相近的谐波成份，波形上呈包络调制型（波包）的脉冲。频散使得波包传播速度——群速度——异于相速度，或慢或快。在绝大多数情况下，群速度（几乎）等于声能传播的速度。因此，有必要区分相速度和群速度。本文阐述相速度和群速度的基本概念及其关系。

顾名思义，相速度（phase velocity【注 1】）乃简谐声波相位的传播速度。频率 ω 、波数 k 的简谐声波

$$p = p_a e^{j(\omega t - kx)}$$

的相位 φ 为

$$\varphi = \omega t - kx = \omega \left(t - \frac{x}{c_\varphi} \right)$$

其中

$$c_\varphi = \frac{\omega}{k} \quad (1)$$

是相速度。 $t = t_1$ 时刻、 $x = x_1$ 处的相位为 φ （例如等于 π ）。过一段时间到 $t = t_2$ 时刻，这个相位移动到 $x = x_2$ 处，即

$$\varphi = \omega \left(t_1 - \frac{x_1}{c_\varphi} \right) = \omega \left(t_2 - \frac{x_2}{c_\varphi} \right)$$

由此得出，

$$c_\varphi = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

可见，公式（1）定义的 c_φ 正是等值相位的传播速度。值得提醒的是相速度与媒质声速是两个概念。媒质声速 c_0 （speed of sound）是媒质的状态特征量，根据媒质的状态而定。通常情形下相速度等于媒质的声速 c_0 。但在受限空间中，相速度不一定等于声速 c_0 。例如，声管中高次（ m, n ）模式的相位是

$$\varphi(t, x) = \omega t - k_{mn}^{(x)} x, \quad \left(k_{mn}^{(x)} = \sqrt{k^2 - k_{mn}^2} \right)$$

式中 k 是波数 ($k=\omega/c_0$)， k_{mn} 是第 (m, n) 模式的简正波数。该模式的相速度是

$$c_\varphi = \frac{\omega}{k_{mn}^{(x)}} = \frac{c_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{c_0 k_{m,n}}{\omega} \right)^2}} > c_0 \quad (2)$$

高次模式的相速度 c_φ 不但大于 (不等于) 声速 c_0 ，而且是频率 ω 的函数。

一般而言，在论及相速度时，把相位 φ 视作时空二元函数：

$$\varphi = \varphi(x, t)$$

随着声波的运动，时间和空间上保持等值相位的位置 x 是时间的函数 $x=x(t)$ ，相速度是此等值 ($d\varphi=0$) 相位的速度，所以

$$\begin{aligned} d\varphi &= \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{dt} = 0 \\ \rightarrow c_\varphi &= \frac{dx}{dt} = - \frac{\partial \varphi / \partial t}{\partial \varphi / \partial x} \end{aligned}$$

群速度 (group velocity) 与此不同。它与一组频率略微不同的声波群有关。由于频率相近，波群表现为幅度调制的包络型振荡声脉冲。设振幅相等、频率分别为 ω_1 和 ω_2 、波数分别为 k_1 和 k_2 的两个平面简谐声压波，

$$p_1 = p_a e^{j(\omega_1 t - k_1 x)}, \quad p_2 = p_a e^{j(\omega_2 t - k_2 x)}$$

其相速度分别为 $c_1 = \omega_1/k_1$ ， $c_2 = \omega_2/k_2$ 。叠加而成的声波是

$$\begin{aligned} p &= p_1 + p_2 = p_a \left(e^{j(\omega_1 t - k_1 x)} + e^{j(\omega_2 t - k_2 x)} \right) \\ &= 2p_a \cos \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{k_1 - k_2}{2} x \right) e^{j \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{k_1 + k_2}{2} x \right)} \\ &= 2p_a \cos(\Delta \omega t - \Delta k x) e^{j(\omega_0 t - k_0 x)} \end{aligned}$$

式中，

$$\omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \quad k_0 = \frac{k_1 + k_2}{2}, \quad \Delta \omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}, \quad \Delta k = \frac{k_1 - k_2}{2}$$

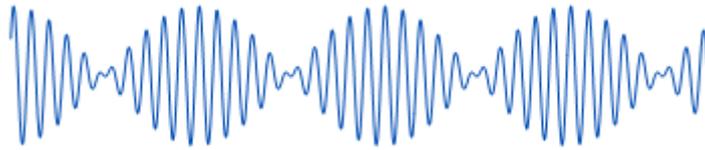
这是一个波幅时空周期调制的包络型行波，相速度为 $c_\varphi = \omega_0/k_0 = (\omega_1 + \omega_2)/(k_1 + k_2)$ 。声压幅度

$$|p| = |p_a| \cos(\Delta\omega t - \Delta kx)$$

是调制波的包络形状，具有不同的传播速度

$$c_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2}$$

下图一是 p 的时空波形，其中设定两个波的频率相近、波数相近 ($\omega_1 \approx \omega_2$, $k_1 \approx k_2$)。对于无频散的媒质, $c_\varphi = c_1 = c_2$, 故 $c_\varphi = c_g$ 。但如果媒质是频散的, $c_1 \neq c_2$, 因此, $c_g \neq c_\varphi$, 也就是说, 波包的传播速度 c_g 不等于相速度 c_φ 。此波包传播速度 c_g 即**群速度**。下图一所示的群速度 $c_g \ll c_\varphi$, 故波包几乎静止。群速度可大于相速度, 也可小于相速度, 甚至是负的: 尽管声波的相平面是前向传播的, 波包却反向传播!



图一、两个频率波数相近但相速度不等的声压合成的总声压波形。明显可以看出, $c_g \ll c_\varphi$ 。

再以稍复杂的例子说明。设频率 ω 、波数 k 的平面声压波

$$p_a = p_a(\omega) e^{j(\omega t - kx)}, \quad \left(k = \frac{\omega}{c_\varphi} \right)$$

的波幅是频率的函数 (下标 ω 特别标识频率为 ω 的波): $p_a(\omega)$ 。不失一般性, 设谐波 $p_a(\omega)$ 具有高斯分布的形式

$$p_a(\omega) = \frac{p_0}{\sqrt{2\pi\Delta\omega}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega}\right)^2\right]$$

式中 p_0 、 ω_0 和 $\Delta\omega$ 皆为常数。此 $\Delta\omega$ (非前 $\Delta\omega$) 衡量频带宽度, ω_0 是此频带的中心频率。可见, 这些波以中心频率 ω_0 的成份幅度最大。假定所有的频率成份皆存在, 则总的声压 p 是所有频率成份的线性叠加

$$p(x, t) = \frac{p_0}{\sqrt{2\pi\Delta\omega}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega}\right)^2} e^{j\omega\left(t - \frac{x}{c_\varphi}\right)} d\omega \quad (3)$$

假如相速度 c_φ 是与频率无关的常数, 则积分可得

$$p(x, t) = A \left(t - \frac{x}{c_\varphi} \right) e^{j\omega_0\left(t - \frac{x}{c_\varphi}\right)}$$

式中 $A = |p|$ 是声压波的振幅, 定义为

$$A(z) \equiv p_0 \exp \left[-\frac{1}{2} (\Delta\omega \cdot z)^2 \right] \quad (4)$$

此乃幅度调制型包络波，振荡频率 ω_0 ，时间宽度约 $\Delta\omega$ ，空间宽度约 $c_\phi/\Delta\omega$ 。整个波形以相速度 c_ϕ 行进：相位是，波幅包络 A 亦是，其传播如下图二蓝色波形所示。



图二、高斯调制包络脉冲传播：蓝色波形：无频散媒质 ($c_g=c_\phi$)，红色波形：频散媒质 ($c_g=c_\phi/2$)。

但是，如果相速度 c_ϕ 是频率的函数，则波数 $k=\omega/c_\phi$ 与频率的关系呈非线性： $k=k(\omega)$ ；反之亦然。对此函数作关于中心频率 ω_0 的泰勒展开

$$k = k(\omega) \equiv \frac{\omega}{c_\phi} = k(\omega_0) + \frac{dk}{d\omega}(\omega - \omega_0) + \dots = \frac{\omega_0}{c_{\phi 0}} + \frac{\omega - \omega_0}{c_g} + \dots \quad (5)$$

其中 $c_{\phi 0}=c_\phi(\omega_0)$ 是 ω_0 谐波的相速度，而 c_g 定义为

$$c_g = c_g(\omega_0), \quad c_g(\omega) = \frac{d\omega}{dk}(k) \quad (6)$$

就弱频散而言，波数与频率的非线性关系并不强烈，故而展开式 (5) 中仅保留前两项而略去其余，代入积分公式 (3) 求积，则可得到

$$p(x,t) = A \left(t - \frac{x}{c_g} \right) e^{j\omega_0 \left(t - \frac{x}{c_{\phi 0}} \right)} \quad (7)$$

式中波幅 A 由公式 (4) 定义。这种情形的相速度仍是 $c_{\phi 0}$ ，但波的振幅包络（波幅）A 却以速度 c_g 传播。此即**群速度**（group velocity）。上图的红色波形与蓝色波形相速度、振荡频率、空间宽度皆相同，唯其群速度小一半。假设 $\Delta\omega \ll \omega_0$ ，则公式 (7) 中的幅度函数 A 是时空的缓变函数。在此假设下，可以证明【注 2】，

$$v \approx \frac{P}{\rho_0 c_\phi}$$

即质点振速 v 与声压近乎平面声波的关系。因此，平均声能密度近似为

$$\bar{\varepsilon}(x,t) \approx \frac{|p|^2}{2\rho_0 c_\varphi^2} = \frac{1}{2\rho_0 c_\varphi^2} A^2 \left(t - \frac{x}{c_g} \right)$$

显见，声能以群速度 c_g 传播。

根据定义（6），群速度也可表为

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} = \left(\frac{d}{d\omega} k(\omega) \right)^{-1} = \left(\frac{d}{d\omega} \frac{\omega}{c_\varphi(\omega)} \right)^{-1} = c_\varphi \left(1 - \frac{\omega}{c_\varphi} \frac{dc_\varphi}{d\omega} \right)^{-1} \quad (8)$$

所以，若 $dc_\varphi/d\omega=0$ ，则 $c_g=c_\varphi$ ；否则， $c_g \neq c_\varphi$ 。视 $dc_\varphi/d\omega$ 取值之正负，群速度既可大于相速度（ $dc_\varphi/d\omega > 0$ ）【注3】，也可小于相速度（ $dc_\varphi/d\omega < 0$ ，如图一、二所示），甚至可负。另一个奇异的情形是 $dc_\varphi/d\omega = -\infty$ ，结果 $c_g=0$ ，即波包（声能）静止！【注4】

绝大多数情形下，群速度 c_g 等于能量传递的速度。例如，把公式（2）代入公式（8），求得声管高次（ m, n ）模式的群速度

$$c_g = c_0 \sqrt{1 - \left(\frac{k_{mn}}{k} \right)^2}, \quad \left(k = \frac{\omega}{c_0} \right) \quad (9)$$

它小于自由空间声速 c_0 （当然也小于该模式的相速度 c_φ ）。设坐标（ x, y ）位于横截面上， z 沿管轴方向。在管道中，（ m, n ）简正模式 Φ_{mn} 满足二维拉普拉斯方程

$$\Delta \Phi_{mn} + k_{mn}^2 \Phi_{mn} = 0, \quad (\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2) \quad (10)$$

式中 Δ 是二维拉氏算符， k_{mn} 是属于该模式的简正波数。在刚性边界条件下，可以证明这些模式是正交的。对应模式 Φ_{mn} 的声压 p_{mn} 和速度 \mathbf{v}_{mn} 分别为

$$\begin{aligned} p_{mn} &= A_{mn} \Phi_{mn} e^{-jk_{z,mn}z} \\ \rho_0 c_0 \mathbf{v}_{mn} &= -\frac{1}{jk} \nabla p = A_{mn} \left(-\frac{1}{jk} \nabla_\perp \Phi_{mn} + \frac{k_{z,mn}}{k} \Phi_{mn} \right) e^{-jk_{z,mn}z} \\ \left[\nabla_\perp = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \right] \end{aligned} \quad (11)$$

其中， A_{mn} 是（ m, n ）模式的振幅， $k_{z,mn}$ 是波矢的轴向（ z ）分量：

$$k_{z,mn} = \pm \sqrt{k^2 - k_{mn}^2}$$

轴向声能密度（即单位长度的声能） E_{mn} 是体声能密度对横截面 S 的积分：

$$E_{mn} = \iint_S \epsilon_{mn} dS = \iint_S \frac{1}{4} \rho_0 \left(\mathbf{v}_{mn}^* \cdot \mathbf{v}_{mn} + \left| \frac{p_{mn}}{\rho_0 c_0} \right|^2 \right) dS \quad (12)$$

把前列速度表达式（11）代入，经稍复杂的演算可证明：

$$E_{mn} = \iint_S \frac{1}{4 \rho_0 c_0^2} \left(|\rho_0 c_0 \mathbf{v}_{mn}|^2 + |p_{mn}|^2 \right) dx dy = \frac{|A_{mn}|^2}{2 \rho_0 c_0^2} \iint_S |\Phi_{mn}|^2 dx dy$$

其中最后等式应用了 Φ_{mn} 满足的二维拉普拉斯方程，及其满足的刚性管壁边界条件。任意横截面上的声功率 W_{mn} 为声强沿横截面的积分。经类似的推导，得出

$$W_{mn} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\iint_S p_{mn}^* \mathbf{v}_{mn} dS \right) = \frac{|A_{mn}|^2}{2 \rho_0 c_0} \frac{k_{z,mn}}{k} \iint_S |\Phi_{mn}|^2 dx dy$$

比较两式知， $W_{mn} = E_{mn} c_g$ ，即 c_g 是高次 (m,n) 模式声能的传播速度【注 5】。诚然，不同简正模式，群速度 c_g 亦不同。

注释

【1】作为媒质的特征参数的声速，英文是 sound speed，或 speed of sound。但专论波的相速度时，多用英文词汇 phase velocity。

【2】读者可否验证之？

【3】 c_g 随频率增高而增大的现象在光学中谓之反常色散；反常色散致使群速度超光速。

【4】在光学中，零群速度表现为光被“捕获”！

【5】参见王新龙《声学基础》第五章课件；杜功焕《声学基础》第 286 页。

引自：<http://xlwangnu.blog.163.com/blog/static/190719270201272361120331/>

运动点声源的辐射

Sound radiation from a moving point source

南京大學聲學研究所 王新龍

运动媒质引起声多普勒效应，运动声源亦然。众所周知，静止的**点声源**所辐射的声场是球对称的。然而，声源的运动不仅会导致辐射声波频率的各向异性——多普勒效应，还破坏了辐射声场的球对称性（或降低对称度），使其呈现指向特性。本文先给出运动点声源的声辐射理论，再集中讨论亚音速和超音速两种情形的辐射特性。

设密度 ρ_0 、声速 c_0 的媒质中存在一点声源，沿 z 方向以速度 V 匀速运动，时间 $t=0$ 时刻恰过坐标原点 O ，其体积流函数 q 可表为

$$q(\mathbf{x}, t) = Q(t)\delta(x)\delta(y)\delta(z - Vt) \quad (1)$$

式中， $\mathbf{x} = (x, y, z)$ 为三维空间的坐标矢量， Q 是声源的流率。此点源所辐射的声压场 p 满足**有源波动方程**

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} q(\mathbf{x}, t) \quad (2)$$

声源运动的快慢可用**马赫数**（Mach number） M 衡量：

$$M = \frac{V}{c_0} \quad (3)$$

$M < 1$ 称为**亚音速**（subsonic）， $M > 1$ 称为**超音速**（supersonic）。为求方程（2）之解，引入**声速度势** $\mathbf{v} = \text{grad}(\Phi)$ （或可定义为 $\mathbf{v} = -\text{grad}(\Phi)$ ，但对结果无任何影响）。声压 p 与声速度势 Φ 具有简单**关系**

$$p = -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (4)$$

将其代入声压波方程（2），对方程两边作时间积分，得到速度势 Φ 所满足的波动方程

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = Q(t)\delta(x)\delta(y)\delta(z - Vt) \quad (5)$$

相比方程（2），此方程右端无时间导数，数学处理更方便。因此，问题归结为求解无初值、无边值的有源声波方程（5）。莫尔斯等人在《理论声学》一书

【1】中，采用了洛仑兹变换把所求运动声源问题转化为静止声源的问题，从而

获得辐射声场解。本文拟采用格林函数方法直接求解。波动方程 (5) 对应的格林函数 $G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t')$ 满足方程

$$\nabla^2 G - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - t')$$

它存在时延解【2】

$$G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = \frac{1}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c_0}\right), \quad [\mathbf{x}' = (x', y', z')]$$

其中, $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ 为观察点 \mathbf{x} 到点声源位置 \mathbf{x}' 的空间距离。格林函数的物理意义是: 位于 \mathbf{x}' 的点源在 $t=t'$ 时刻发射一个脉冲经过时延 $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c_0$ 而传播至观察点 \mathbf{x} 。利用格林函数, 方程 (5) 具有如下积分形式解【2】:

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| < \infty} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} q\left(\mathbf{x}', t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c_0}\right) d\mathbf{x}'$$

积分遍及声源体。把公式 (1) 给出的点源函数 q 代入, 先利用 δ 函数的积分性质对 x' 和 y' 变量积分, 结果上式简为

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{R} Q\left(t - \frac{R}{c_0}\right) \delta(z' + MR - Vt) dz'$$

$$\left(R \equiv |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|_{x'=y'=0} = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z')^2}\right)$$

式中, R 是源点 $\mathbf{x}' = (0, 0, z')$ 与观察点 $\mathbf{x} = (x, y, z)$ 之间的距离。为进一步求解此积分, 特定义辅助函数

$$\xi(z') = z' + MR - Vt$$

此函数的零点 (根) 满足方程:

$$z' + MR = Vt \rightarrow z' = V\left(t - \frac{R}{c_0}\right)$$

此零点 z' 的意义是: t 时刻观察点接收到的声波, 是声源在 $t' = t - R/c_0$ 时刻在位置 $z' = Vt'$ 所辐射的。对应的距离 R 必须满足方程

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z')^2} \Big|_{z' = V\left(t - \frac{R}{c_0}\right)}$$

$$\rightarrow R^2 = x^2 + y^2 + (z - Vt + MR)^2$$

其解有二： $R=R_+$ 和 R_- ，

$$R_{\pm} = \frac{M(z-Vt) \pm R_1}{1-M^2}, \quad R_1 = \sqrt{(1-M^2)(x^2+y^2) + (z-Vt)^2} \quad (7)$$

显然 R_- 在亚音速($M < 1$)时恒负而无意义。若 $M > 1$ 且 $z < Vt$ (即观察点位于声源之后)，则两者皆意义。所以，在超音速的情形下，同时到达观察点的声波是声源在两个不同时刻所辐射的。根据Dirac- δ 函数的性质，含 δ 函数的积分由 δ 函数的宗量 ζ 的零点决定。于是，求得上述速度势的积分

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{R} \mathcal{Q}\left(t - \frac{R}{c_0}\right) \delta(\zeta(z')) dz' = \Phi_+(\mathbf{x}, t) + \Phi_-(\mathbf{x}, t)$$

其中，

$$\begin{aligned} \Phi_{\pm}(\mathbf{x}, t) &= -\frac{1}{4\pi} \frac{\mathcal{Q}\left(t - \frac{R}{c_0}\right)}{R} \left| \frac{d\zeta}{dz'} \right|^{-1} \Bigg|_{R=R_{\pm}} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\mathcal{Q}\left(t - \frac{R}{c_0}\right)}{\left| R + M(z' - z) \right|} \Bigg|_{R=R_{\pm}} \\ &\xrightarrow{z' = Vt - MR} -\frac{1}{4\pi} \frac{\mathcal{Q}\left(t - \frac{R}{c_0}\right)}{\left| (1-M^2)R - M(z - Vt) \right|} \Bigg|_{R=R_{\pm}} \\ &\xrightarrow{(1-M^2)R_{\pm} - M(z - Vt) = \pm R_1} -\frac{\mathcal{Q}\left(t - \frac{R_{\pm}}{c_0}\right)}{4\pi R_1} \end{aligned}$$

最终，得到如下速度势 Φ 的解：

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = -\frac{\mathcal{Q}\left(t - \frac{R_+}{c_0}\right)}{4\pi R_1} - \frac{\mathcal{Q}\left(t - \frac{R_-}{c_0}\right)}{4\pi R_1} \quad (8)$$

其中的第二项只有在超音速 $M > 1$ 之情形才存在。

一、亚音速情形 ($M < 1$)

在亚音速 ($M < 1$) 情形下, 速度势解 (8) 中仅第一项存在。如果 $V=0$, 则 $R=R_+=R_1$, 速度势解退而为静止点声源的辐射声场公式。根据公式 (4) 和 (8), 得到辐射的声压场

$$p = \frac{\rho_0}{4\pi R_1} \left[Q' \left(t - \frac{R_+}{c_0} \right) \left(1 - \frac{1}{c_0} \frac{dR_+}{dt} \right) - Q \left(t - \frac{R_+}{c_0} \right) \frac{1}{R_1} \frac{dR_1}{dt} \right] \quad (9)$$

由于 R_+ 是运动点源在 $t=t'$ 时刻位于 \mathbf{x}' 处时所辐射的声波恰好在 t 时刻传播到观察点 \mathbf{x} 的距离, 所以, $R_+ = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = c_0(t-t')$ 。在 $t=t'$ 时刻, 源点在 z 轴的 $z'=Vt'$ 位置, 或者 $\mathbf{x}'=(0,0,Vt')$ 。设矢量 $\mathbf{x}-\mathbf{x}'$ 与 z 轴成夹角 θ (极角), 则有,

$$\begin{aligned} R_+ \cos \theta &= z - z' = z - Vt' \\ z - Vt &= z - Vt' - V(t-t') = R_+ (\cos \theta - M) \\ R_1 &= R_+ (1 - M \cos \theta) \end{aligned}$$

利用这些关系, 从公式 (7) 易得

$$\begin{aligned} \frac{dR_1}{dt} &= \frac{(z-Vt)(-V)}{R_1} = -V \frac{\cos \theta - M}{1 - M \cos \theta} \\ \frac{1}{c_0} \frac{dR_+}{dt} &= \frac{1}{c_0} \frac{-VM + \frac{dR_1}{dt}}{1 - M^2} = -\frac{M \cos \theta}{1 - M \cos \theta} \quad (10) \end{aligned}$$

代入 (9), 最后得到亚音速点源辐射声压场的表达式

$$p = \frac{\rho_0}{4\pi R_+ (1 - M \cos \theta)^2} \left[Q' \left(t - \frac{R_+}{c_0} \right) + \frac{V}{R_+} \frac{\cos \theta - M}{1 - M \cos \theta} Q \left(t - \frac{R_+}{c_0} \right) \right] \quad (11)$$

注意, 式中的 R_+ 和 θ 悉为时间 t 的函数。在声源正前方 ($\theta=0$), $z > Vt$, 根据公式 (7), $R_1 = z - Vt$, $R_+ = R_1 / (1 - M)$; 而在声源的后方 ($\theta=\pi$), $R_1 = Vt - z$, $R_+ = R_1 / (1 + M)$ 。分别代入 (11), 得到声源前后的声压为

$$p|_{\theta=0} = \frac{\rho_0}{4\pi R_1} \left[\frac{1}{1 - M} Q' \left(\frac{t - z/c_0}{1 - M} \right) + \frac{V}{R_1} Q \left(\frac{t - z/c_0}{1 - M} \right) \right], \quad (R_1 = z - Vt)$$

$$p|_{\theta=\pi} = \frac{\rho_0}{4\pi R_1} \left[\frac{1}{1 + M} Q' \left(\frac{t + z/c_0}{1 + M} \right) - \frac{V}{R_1} Q \left(\frac{t + z/c_0}{1 + M} \right) \right], \quad (R_1 = Vt - z)$$

如果观察点在远离声源的 z 轴上, 则上两式中的第二项均可略而不计, 于是在离声源同样的距离上前后声压的振幅比为 $(1+M)/(1-M)$ 。若马赫数 M 趋于 1, 则前向声压趋于无穷。

简谐声源

设声源是圆频率为 ω_0 的简谐声源，

$$Q(t) = Q_0 e^{j\omega_0 t}$$

Q_0 是源强。代入(11)得到简谐声压场解

$$p = \frac{jk_0 \rho_0 c_0 Q_0}{4\pi R_+} D_1(\theta) e^{j\omega_0 \left(t - \frac{R_+}{c_0}\right)}, \quad \left(k_0 = \frac{\omega_0}{c_0}\right) \quad (12)$$

其中

$$D_1(\theta) = \frac{1}{(1 - M \cos \theta)^2} \left[1 + \frac{1}{jk_0 R_+} \frac{M(\cos \theta - M)}{1 - M \cos \theta} \right] \quad (13)$$

显然，公式(12)除了因子 D 之外，与静止点声源所辐射声场公式形式一致。辐射声场具有相位：

$$\phi(t) = \omega_0 \left(t - \frac{R_+}{c_0} \right)$$

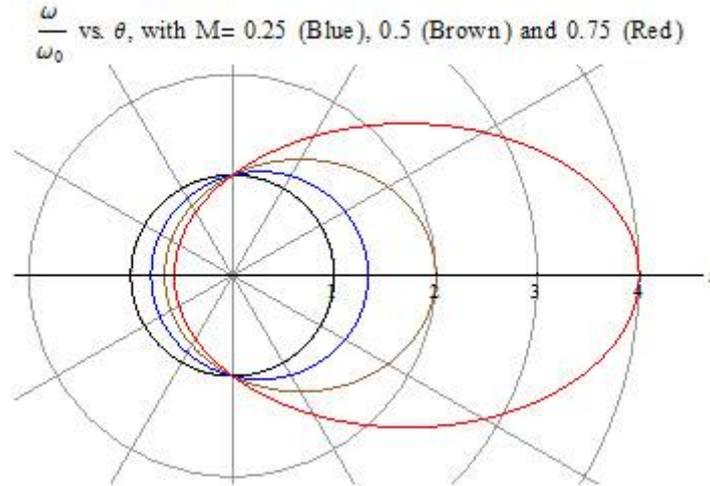
由于 R_+ 是时间的函数，相位不再简单地正比于时间 t 。根据频率 ω 的定义，

$$\omega = \frac{d\phi}{dt} = \omega_0 \left(1 - \frac{1}{c_0} \frac{dR_+}{dt} \right)$$

又根据(10)，得到

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 - M \cos \theta} \quad (14)$$

此即运动点声源的多普勒公式。在声源的正前方， $\theta=0$ ，频率最高 $\omega=\omega_0/(1-M)>\omega_0$ ；在声源后方， $\theta=\pi$ ，频率最低 $\omega=\omega_0/(1+M)<\omega_0$ ；而在与声源运动方向垂直的方向上，频率不变。图一绘出了频率的各向异性。



图一、亚音速频率的指向性（多普勒效应）。黑色：M=0，蓝色：M=0.25，古铜色：M=0.5，红色：M=0.75

显然，公式（12）给出的声压幅度 $|p|$ 并非常数，而是时间的函数，因为无论 θ 还是 R_+ 均为时间的函数。当然，公式（13）给出的 D_1 也是时间函数。在相对声源静止的**随动坐标系**（相当于对 z 轴做伽利略变换： $z-Vt \rightarrow z$ ）， θ 与 R_+ 均与时间无关，因而可以考察辐射的指向性。值得注意的是，声压场的指向性不仅包含于 D_1 之中，还包含在 R_+ 之中，即 R_1 和 R_+ 依赖于极角 θ 。根据定义（7），

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 = \sqrt{(1-M^2)(x^2+y^2)+z^2} = r\sqrt{1-M^2\sin^2\theta} \\ R_+ = \frac{Mz+R_1}{1-M^2} = r \frac{\sqrt{1-M^2\sin^2\theta} + M\cos\theta}{1-M^2} \\ \quad = \frac{r}{\sqrt{1-M^2\sin^2\theta} - M\cos\theta} \end{array} \right. , \quad (r^2 = x^2 + y^2 + z^2)$$

式中 r 是源点（原点）到观察点的距离，在随动坐标系中与时间 t 无关。代入公式（12），得到随动坐标系中的声压场表示

$$p = \frac{jk_0\rho_0c_0Q_0}{4\pi r} D(\theta) e^{j\omega_0\left(t-\frac{R_+}{c_0}\right)} \quad (15)$$

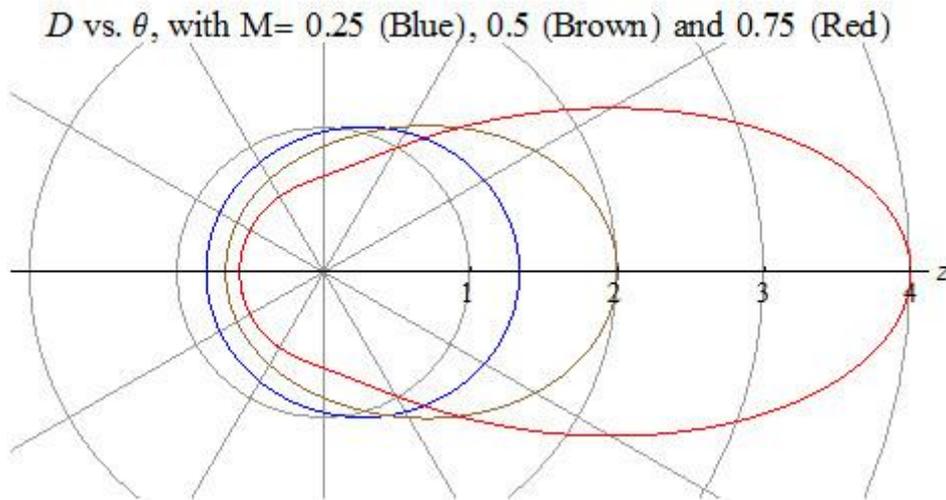
其中

$$D(\theta) = \left(\sqrt{1-M^2\sin^2\theta} - M\cos\theta\right) D_1(\theta) \quad (16)$$

显然， D 是随动坐标系中声压场的指向性因子。需要指出， D 并非相对于声压的最大值归一化的。从公式（15）可知，它是相对于**静止声源的辐射声压振幅**而言的。在远场（ $kor \gg 1$ ），从公式（13）得到， $D_1 \approx 1/(1-M\cos\theta)^2$ ，结果，

$$D(\theta) \approx \frac{\sqrt{1 - M^2 \sin^2 \theta} - M \cos \theta}{(1 - M \cos \theta)^2}$$

图二画出了不同马赫数 M 情形下的指向性图 D 。可见，随着马赫数 M 的增大，点源辐射声场逐渐偏离各向同性（球对称性），呈现明显的方向性。在声源运动的正前方（ $\theta=0$ ），声压最大，而在后方，声压最小，仿佛正前方的声压被“挤压”，而正后方的被“拉伸”，如图三（a）所示。



图二、亚音速声压场指向性图 $D(\theta)$

二、超音速情形 ($M > 1$)

虽然根据爱因斯坦相对论，超光速是不可能发生的，但超音速则完全可能，如超音速飞机等。超音速运动点源的声辐射如图三（c）所示。从图可见，超音速点源辐射形成以源为顶点的锥状声场——声锥（sound cone）。声锥的半角宽度 φ 满足： $\sin \varphi = 1/M$ 。根据速度势公式（8），超音速声源所辐射的声场由两部分组成，对应于点源先后经过的两个不同位置 R_+ 和 R_- 所辐射的声场之叠加。因此之故，在声锥内的超音速声场会发生干涉现象，形成复杂的驻波声场。在超音速下，还会形成冲击波等强非线性波，并因声场的奇异性而产生诸如声爆（sonic boom）等奇异现象。超音速声辐射是航空声学 and 航空动力学研究的课题。本文无意深入分析之，有兴趣者可有关参阅文献。

(a) $M < 1$ (b) $M = 1$ (c) $M > 1$

图三、不同马赫数 M 的运动点声源的多普勒效应。

（因为是动态演示，所以请到博客观看）

【1】P. M. Morse & K. U. Ingard, 《理论声学》（中译本），842-858 页。

【2】郭敦仁 编《数学物理方法》（人民教育出版社，1965 年）。

引自：<http://xlwangnu.blog.163.com/blog/static/1907192702012720561213/>

運動媒質的多普勒效應

Doppler Effect in Moving Media

南京大學聲學研究所 王新龍

運動改變聲波的頻率，最常見之例當屬高速行駛列車汽笛聲音的音調（頻率）變化。此乃波動的運動學現象，即著名的多普勒效應（Doppler Effect），涉及媒質、聲源和觀察者（或接收器）三者之間的相對運動。雖然根據牛頓第一定律慣性系是等價的，但媒質、聲源和聲接收器之間的互動屬於運動學問題，坐標變換會因此產生新的運動現象。本文僅關注運動媒質引起的多普勒效應。

試以兩端開口、長為 l 的聲管為例說明。眾所周知，管內聲波之所以共振，蓋因聲波的振盪週期恰等於管內聲波來回一個行程所需的時間。假如管與流體（空氣）皆靜止不動，則管的最大共振週期為 $T_0=2l/c_0$ ，最小共振頻率（基頻）為熟知的 $f_0=1/T=c_0/2l$ ，其中 c_0 為媒質聲速。但是，若管中流體以速度 V 流動，聲波在管內一個來回行程耗時

$$T = \frac{l}{c_0 + V} + \frac{l}{c_0 - V}$$

最小共振頻率 f 遂為

$$f = \frac{1}{T} = f_0(1 - M^2), \quad \left(f_0 = \frac{c_0}{2l}, M \equiv \frac{V}{c_0} \right)$$

式中， f_0 是管內流體靜止時的共振頻率， M 是媒質運動的馬赫數（Mach number），表徵流體相對聲速的快慢。馬赫數 M 大於 1 是超音速的運動。從上式可知，管內空氣的流動使共振頻率 f 下降。

假設媒質攜聲源以速度 V 沿 x 的正向運動，同時聲源向 x 軸的正向輻射平面聲波。在相對媒質靜止的坐標系（稱為隨動坐標系）中，聲波的波前當以速度 c_0 向前（ x 方向）傳播，聲波頻率為 $f_0=c_0/\lambda$ ，其中 λ 是聲波的波長。但是，對於靜止坐標系中位於聲源正前方的觀察者而言，波前傳播速度是 $c=c_0+V$ ，一個週期內行進的空間距離為 cT ，但波長仍為 λ 。因此，此觀察者所測得的聲波頻率是，

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{c_0 + V}{c_0 / f_0} = f_0(1 + M)$$

此種情形等價於媒質與聲源皆靜止，而觀察者以反向速度（ $-V$ ）運動之情形。如果僅媒質以速度 V 沿 x 正向運動而聲源靜止，並設隨動坐標系中聲波頻率為 $f_0=c_0/\lambda$ 。而在靜止坐標系中，波前在一個週期內的行進距離仍為

$\lambda cT = (c_0 + V)T$ ，故而頻率仍由上式給出。此處須注意，波前傳播的距離（例如波長 λ ）與觀察者運動與否有關。

推而廣之，設媒質在三維空間以勻速 \mathbf{V} （三維矢量）運動，方向任意。三維波矢 \mathbf{k} （其大小 $k = |\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda$ ）在隨媒質而動的坐標系 $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ 和靜止坐標系 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ 中是相同的。設在隨動坐標系中測得的聲波圓頻率為 $\omega_0 = 2\pi f_0$ ，則平面簡諧聲波的相位為

$$\varphi = \omega_0 t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0 \quad (1)$$

而在觀察者所在的“靜止”坐標系中，觀察者所測得的聲波圓頻率為 $\omega = 2\pi f$ ，則此聲波的相位為

$$\varphi = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \quad (2)$$

無疑，公式（1）和（2）所給出的是同一聲場的相位。隨動坐標 \mathbf{r}_0 與靜止坐標 \mathbf{r} 通過下列變換相聯繫：

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{V}t \quad (3)$$

將此變換代入公式（1），使之用靜止坐標表示，則

$$\varphi = (\omega_0 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{V})t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$$

此相位 φ 當然應該等於公式（2）的相位 φ 。據此，得到靜止坐標系中的觀察者所測量得到的圓頻率 ω 與隨動坐標系的聲波圓頻率 ω_0 的關係

$$\omega = \omega_0 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{V} = \omega_0 (1 + M \cos \theta), \quad \left(M = \frac{|\mathbf{V}|}{c_0} \right) \quad (4)$$

式中 θ 是波矢 \mathbf{k} 與媒質運動速度 \mathbf{V} 之間的角度，即

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{V} = kV \cos \theta, \quad (V = |\mathbf{V}|)$$

由此得到波傳播的相速度 $c = \omega/k$ ：

$$c = c_0 (1 + M \cos \theta) \quad (5)$$

可見，聲波的頻率及其傳播速度各向異性。當觀察者位於聲源的正前方（ $\theta=0$ ），聲速最大。而在聲源之後（ $\theta=\pi$ ）， $c=c_0(1-M)$ ，聲速最小；對於超音速（ $M>1$ ）運動的媒質， $c<0$ ，意謂在聲源之後的觀察者聽不到聲源發出的聲音。

數學上，此各向異性乃聲波方程空間對稱性被破壞之故。在隨動坐標系 $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ 中，聲壓場遵守各向同性的聲波方程

$$\nabla_0^2 p - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0, \quad \left[\nabla_0 = \left(\frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial y_0}, \frac{\partial}{\partial z_0} \right) \right]$$

利用公式（3）把隨動坐標變換到“靜止”坐標系 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ，則存在變換關係

$$\nabla_0 \rightarrow \nabla, \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla$$

則上列聲波方程在靜止坐標系中的表示為

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c_0^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right)^2 p = 0, \quad \left[\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] \quad (6)$$

此即運動媒質中的聲波方程。可見，因媒質運動速度 \mathbf{V} ，波動方程不再保有空間對稱性。設其正向平面波解為

$$p = p_a e^{j\varphi(t,x)}$$

φ 由公式 (2) 給出。代入波動方程 (6)，即得到頻率方程

$$(\omega - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k})^2 = (kc_0)^2$$

其解即公式 (4)。

誠然，聲波方程 (6) 可直接從歐拉運動方程、連續性方程和狀態方程出發導出。惟須注意，因媒質的運動，靜止坐標系中的質點速度是是隨動坐標系中的振速 \mathbf{v} 與媒質運動速度 \mathbf{V} 之和：

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \mathbf{V}$$

如此，時間全導數與偏導數之關係應該是

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}' \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} + \mathbf{V}) \cdot \nabla$$

隨動坐標系的振速 \mathbf{v} 依然擾動小量，但流速 \mathbf{V} 則不必然。因此，時間全導數不可用偏導數近似，即

$$\frac{d}{dt} \approx \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \neq \frac{\partial}{\partial t}$$

結果，歐拉方程和連續性方程

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} + \mathbf{V}) \cdot \nabla \mathbf{v} \right] + \nabla p = 0$$

$$\beta \left[\frac{\partial p}{\partial t} + (\mathbf{v} + \mathbf{V}) \cdot \nabla p \right] + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

的线性化近似是

$$\rho_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} + \nabla p \approx 0$$
$$\beta_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) p + \nabla \cdot \mathbf{v} \approx 0$$

由此可立即導出波動方程 (6)。

引自: <http://xlwangnu.blog.163.com/blog/static/1907192702011112903649808/>

再论声学量的时间均值

On temporal means of acoustic quantities

南京大學聲學研究所 王新龍

声学变量如声压和质点速度等为媒质状态扰动量；声压 p 是压强 P 的扰动量，质点速度 \mathbf{v} 是流速 \mathbf{V} （静态 $\mathbf{V}=\mathbf{0}$ ）的扰动量。若声能、声强等非线性声学量，其时间均值必然非零，无再论之必要。惟对诸如声压 p 等声场描述量，其时间均值尚须深究。一般以为，声压 p 等场量的时间均值为零。对于线性谐波，此结论固千真万确，无须再论。然而，若计入高阶小量，则声压等扰动量之均值未必为零，学者对此当了然而胸。

平均声压

在均匀理想流体中，流体运动的质点速度 \mathbf{v} 和压强 P 服从欧拉方程

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P \quad (1)$$

式中， ρ 是流体密度。根据矢量分析，存在如下矢量运算关系

$$\frac{1}{2} \nabla v^2 = \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \quad (\mathbf{v} = |\mathbf{v}|)$$

对于无旋运动，速度旋度为零，上式简为

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla v^2$$

且存在速度势 Φ ，定义为

$$\mathbf{v} = \nabla \Phi$$

把上两式代入欧拉方程 (1)，稍作整理，得到

$$\nabla \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 + w \right) = 0, \quad \left(\nabla w \equiv \frac{\nabla P}{\rho}, w = \int \frac{dP}{\rho} \right)$$

式中所定义的状态变量 w 为系统的焓。上式存在初积分，

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 + w = 0, \quad \left(w = \int \frac{dP}{\rho} \right) \quad (2)$$

这是伯努利方程在非定常势流情形下之推广。积分结果中本存在与时间有关的积分常数，但该时间函数可并入速度势而丝毫不影响速度势之本意，故迳取其为零。方程（2）即使存在非线性也是正确的，因为理想流体中，只要初始速度无旋，则永保无旋，永远存在速度势。根据状态方程和绝热假设，密度 ρ 是压强 P 的函数 $\rho=\rho(P)$ 。在平衡态附近，密度可以展成声压 $p=P-P_0$ 的幂级数：

$$\rho = \rho(P_0) + \rho' = \rho_0 + \frac{1}{c_0^2} p + O(p^2), \quad \left(\rho_0 = \rho(P_0), c_0^2 = \left. \frac{dP}{d\rho} \right|_{P=P_0} \right)$$

其倒数为

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0} \left[1 - \frac{p}{\rho_0 c_0^2} + O(p^2) \right]$$

把 $1/\rho$ 展式代入 w 的积分式，并作积分，结果

$$w = \int \frac{dp}{\rho} = \int \frac{1}{\rho_0} \left(1 - \frac{p}{\rho_0 c_0^2} + O(p^2) \right) dp = \frac{p}{\rho_0} - \frac{p^2}{2\rho_0^2 c_0^2} + O(p^3)$$

其逆级数为

$$p = \rho_0 w + \frac{\rho_0 w^2}{2c_0^2} + O(w^3)$$

把从方程（2）得到的 w 代入上式，并注意到速度的量值 $v = |\nabla\Phi|$ ，略去高于两阶的小量，得到用速度势表示的声压表达式

$$p \approx -\rho_0 \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho_0 \left[\frac{1}{c_0^2} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} \right)^2 - |\nabla\Phi|^2 \right] \quad (3)$$

若略去右端二阶小量，上式即为线性的声压与速度势关系：

$$p = -\rho_0 \frac{\partial\Phi}{\partial t} + O(p^2)$$

考虑到全导数与偏导数的关系：

$$\frac{d\Phi}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + v^2 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial\Phi}{\partial t} = \frac{d\Phi}{dt} - |\nabla\Phi|^2$$

于是，公式（3）也可以写成

$$p \approx -\rho_0 \frac{d\Phi}{dt} + \frac{1}{2} \rho_0 \left[\frac{1}{c_0^2} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} \right)^2 + |\nabla\Phi|^2 \right] \quad (3a)$$

上式第二项实为流体声能密度。所以，在固定空间点（欧拉坐标下），即使式（3）的第一项的时间均值为零，第二项也不一定为零，即平均声压

$$\bar{p} \approx \frac{1}{2} \rho_0 \left[\overline{\left(\frac{1}{c_0} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2} - \overline{|\nabla \Phi|^2} \right] \quad (4)$$

未必为零。按约定，式中横杠表示时间平均值。惟对形如

$$\Phi = \Phi(c_0 t - x) \quad (5)$$

的行波，（4）式右端恰为零，说明对于行波，直到二阶近似的平均声压为零。

平均密度变化量

根据状态方程，密度的扰动 $\rho' = \rho - \rho_0$ 可以展成如下幂级数

$$\rho' = \frac{1}{c_0^2} p + \frac{1}{2} \frac{d^2 \rho}{dP^2} \Big|_{P=0} p^2 + O(p^3) \quad (6)$$

于是，平均密度变化量

$$\bar{\rho}' \approx \frac{1}{c_0^2} \bar{p} + \frac{1}{2} \frac{d^2 \rho}{dP^2} \Big|_{P=P_0} \bar{p}^2$$

可见，若计及二阶小量，即使平均声压为零，平均密度变化量也不为零。例如，对于理想气体，行波（5）的平均声压等于零，又，

$$\frac{d^2 \rho}{dP^2} \Big|_{P=P_0} = \frac{1-\gamma}{\rho_0 c_0^2} < 0$$

所以，平均密度变化量

$$\bar{\rho}' \approx \frac{1}{2} \frac{d^2 \rho}{dP^2} \Big|_{P=P_0} \bar{p}^2 \approx \frac{1-\gamma}{2\rho_0 c_0^2} \bar{p}^2 = \frac{1}{2} \rho_0 (1-\gamma) \overline{|\mathbf{v}|^2} < 0, \quad (\gamma > 1, p \approx \rho_0 c_0 \mathbf{v})$$

恒小于零。此表明，声波在行进途中媒质平均密度有所降低。

